Nome, Cognome e Matricola

Esame scritto di Geometria
Ingegneria per l'Ambiente ed il Territorio
Terzo appello a.a. 2022/23

5 giugno 2023

Esercizio 1. *In* $(\mathbb{R}^2, \cdot)$ *consideriamo i due punti* $C = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ *e* $P_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

1. *(1 punto) Scrivere equazioni parametriche e cartesiane della retta* r *passante per* C *e* P_1.
2. *(1 punto) Calcolare la pendenza della retta* r.
3. *(1 punto) Calcolare il coseno dell'angolo acuto formato tra la retta* r *e l'asse delle ascisse, ovvero la retta di equazione* $y = 0$.
4. *(1 punto) Calcolare la distanza tra* C *e* P_1.
5. *(1 punto) Scrivere l'equazione parametrica e cartesiana della circonferenza* $\mathcal{C}$ *di centro* C *e passante per il punto* P_1.
6. *(1 punto) Trovare due punti* P_2 *e* P_3 *di* $\mathcal{C}$ *tali che il triangolo di vertici* P_1, P_2 *e* P_3 *sia equilatero.*
7. *(1 punto) Trovare l'equazione parametrica e cartesiana della retta ottenuta riflettendo ortogonalmente l'asse delle ascisse attraverso la retta* r.

Fare un disegno che illustri la situazione.

Esercizio 2. *In* $(\mathbb{R}^3, \cdot)$ *siano*

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad P_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

1. *(2 punti) Calcolare equazioni cartesiane della retta* r *passante per i punti* P_1 *e* P_2*.*
2. *(1 punto) Stabilire se i punti* P_1*,* P_2 *e* P_3 *sono allineati.*
3. *(1 punto) Usare il fascio di piani per* r *per trovare equazioni cartesiane del piano* π *passante per i punti* P_1*,* P_2 *e* Q*.*
4. *(1 punto) Calcolare* $n = \overrightarrow{P_1P_2} \wedge \overrightarrow{P_1Q}$*.*
5. *(1 punto) Calcolare l'area del triangolo* T *di vertici* P_1*,* P_2 *e* Q*.*
6. *(1 punto) Calcolare la distanza di* Q *da* r

Esercizio 3. *Si consideri la seguente matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -4 & 6 \\ 4 & -2 & 0 & 2 \\ -4 & 6 & 4 & -2 \\ -4 & 6 & 8 & -6 \end{pmatrix}$$

1. *(2 punti) Calcolare il polinomio caratteristico*
2. *(1 punto) Calcolare lo spettro di A.*
3. *(3 punti) Calcolare una base di ogni autospazio di A.*
4. *(1 punto) Stabilire se A è diagonalizzabile e nel caso lo sia trovare una matrice invertibile B ed una matrice diagonale D tali che $B^{-1}AB = D$.*

Esercizio 4. *Sia* V *uno spazio vettoriale di dimensione* 3 *e sia* $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ *una base di* V*. Sia* $f : V \to V$ *l'unica applicazione lineare tale che*

$$f(v_1) = v_1 - 2v_2 + v_3, \quad f(v_2) = v_1 + v_3, \quad f(v_3) = v_1 + v_2 + v_3.$$

1. *(1 punto) Calcolare* $f(2v_1 - v_2 + 3v_3)$*.*
2. *(1 punto) Scrivere la matrice che rappresenta* f *nella base* $\mathcal{B}$*. Denotarla con* A*.*
3. *(1 punto) Trovare una base per il nucleo di* f*.*
4. *(1 punto) Trovare una base per l'immagine di* f*.*
5. *(1 punto) Stabilire se* $V = ker(f) \oplus Im(f)$*.*
6. *(1 punto) Sia* $\mathcal{C} = \{w_1, w_2, w_3\}$ *dove*

   $$w_1 = v_1 + 2v_2, \quad w_2 = -v_1 - v_2, \quad w_3 = v_1 + v_2 + v_3.$$

   Dimostrare che $\mathcal{C}$ *è una base di* V*.*
7. *(1 punto) Scrivere la matrice che rappresenta* f *nella base* $\mathcal{C}$*.*

Esercizio 5. *Consideriamo la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. *(1 punto) Dimostrare che A è ortogonalmente diagonalizzabile.*
2. *(1 punto) Stabilire se il vettore $v = e_1 + e_2$ è un autovettore per A.*
3. *(1 punto) Calcolare una base del nucleo di A.*
4. *(1 punto) Trovare una base ortogonale del nucleo di A utilizzando l'algoritmo di Gram-Schmidt.*
5. *(1 punto) Calcolare una base di $ker(A)^{\perp}$.*
6. *(1 punto) Utilizzando i punti precedenti, determinare lo spettro di A senza calcolare il suo polinomio caratteristico.*
7. *(1 punto) Trovare una matrice ortogonale B ed una matrice diagonale D tali che $B^t AB = D$.*