Esercizio 1. *In* $(\mathbb{R}^2, \cdot)$ *consideriamo i due punti* $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ *e* $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

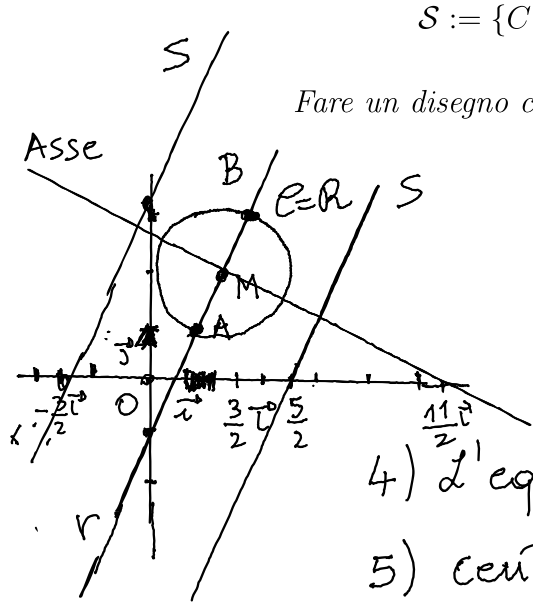
1. *(1 punto) Scrivere equazioni parametriche e cartesiane della retta* r *passante per* A *e* B.
2. *(1 punto) Calcolare la pendenza* m *della retta* r.
3. *(1 punto) Calcolare il punto medio* M *del segmento* $\overline{AB}$.
4. *(1 punto) Calcolare equazioni cartesiane dell'asse del segmento* $\overline{AB}$.
5. *(1 punto) Scrivere equazioni parametriche e cartesiane della circonferenza* $\mathcal{C}$ *avente il segmento* $\overline{AB}$ *come diametro.*
6. *(1 punto) Descrivere il seguente luogo geometrico:*

$$\mathcal{R} := \{C \in \mathbb{R}^2 | \textit{il triangolo di vertici } A,B,C \textit{ è rettangolo in } C\}.$$

7. *(1 punto) Descrivere il seguente luogo geometrico*

$$\mathcal{S} := \{C \in \mathbb{R}^2 | \textit{il triangolo di vertici } A,B,C \textit{ ha area uguale a } 2\}.$$

Fare un disegno che illustri la situazione.



1) $r = A + \langle B-A \rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \rangle : \ 2x - y = 1$

2) $r : \ y = 2x - 1 \Rightarrow m = 2$

3) $M = \frac{1}{2}\vec{OA} + \frac{1}{2}\vec{OB} = \begin{pmatrix} 3/2 \\ 2 \end{pmatrix}$

4) L'equazione è $(B-A)\cdot X = (B-A)\cdot M$ ovvero $x + 2y = \frac{11}{2}$

5) centro $= M$, raggio $= \frac{1}{2}\|A-B\| = \frac{\sqrt{5}}{2}$. Quindi,

$\mathcal{C} = \left\{ M + \frac{\sqrt{5}}{2}\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} \middle| \theta \in [0, 2\pi) \right\} : \ (x - \frac{3}{2})^2 + (y-2)^2 = \frac{5}{4}$

6) $C = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{R} \Leftrightarrow \vec{CA} \cdot \vec{CB} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1-x \\ 1-y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2-x \\ 3-y \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow$

$\Rightarrow x^2 - 3x + 2 + y^2 - 4y + 3 = 0 \Leftrightarrow (x - \frac{3}{2})^2 + (y-2)^2 = \frac{5}{4} \Rightarrow \mathcal{R} = \mathcal{C}$

7) $C = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{S} \Leftrightarrow |\det(A-C | B-C)| = 4.$

$\det(A-C | B-C) = \det\begin{pmatrix} 1-x & 2-x \\ 1-y & 3-y \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1-x & 1 \\ 1-y & 2 \end{pmatrix} = y - 2x + 1$. Quind

$\mathcal{S} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \middle| y - 2x = 3 \right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \middle| 2x - y = 5 \right\} =$ 2 rette parallele a r.

Esercizio 2. *In* $(\mathbb{R}^3, \cdot)$ *consideriamo le due rette*

$$r_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle, \quad r_2 : \begin{cases} x + 2y - z & = & 1, \\ 2x + 3y - 2z & = & 2. \end{cases}$$

1. *(1 punto) Stabilire la posizione reciproca di r_1 ed r_2, senza cambiare la loro forma.*
2. *(1 punto) Calcolare equazioni cartesiane della retta r_1.*
3. *(1 punto) Calcolare equazioni parametriche della retta r_2.*
4. *(1 punto) Usare il fascio di piani per r_2 per trovare equazioni cartesiane del piano π_1 passante per r_2 e parallelo alla retta r_1.*
5. *(1 punto) Usare il prodotto vettoriale per trovare equazioni cartesiane del piano π_2 passante per r_1 e parallelo alla retta r_2.*
6. *(2 punti) Calcolare la distanza tra r_1 ed r_2.*

Notazione : $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

1) $Av_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$ non sono parallele

$\operatorname{rg}(Av_1 | b - AX_1) = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = 2 \Rightarrow$ non si intersecano

$\Big\}$ r_1 e r_2 sono sghembe.

2) $\operatorname{Ker}(1\ 1\ 1) = \langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle \Rightarrow r_1 : \begin{cases} -x + y = 1 \\ -x + z = 2 \end{cases}$

3) $(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -2 & 2 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) = \operatorname{rref}(A|b) \Rightarrow r_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$

4) $\pi_{\alpha,\beta} : \alpha(x + 2y - z - 1) + \beta(2x + 3y - 2z - 2) = 0$ ovvero

$\pi_{\alpha,\beta} : (\alpha + 2\beta)x + (2\alpha + 3\beta)y + (-\alpha - 2\beta) = \alpha + 2\beta$. Vettore normale $= \begin{pmatrix} \alpha + 2\beta \\ 2\alpha + 3\beta \\ -\alpha - 2\beta \end{pmatrix}$.

$\begin{pmatrix} \alpha + 2\beta \\ 2\alpha + 3\beta \\ -\alpha - 2\beta \end{pmatrix} \cdot v_1 = 0 \Leftrightarrow 2\alpha + 3\beta = 0 \Rightarrow (\alpha, \beta) = (-3, 2)$. $\pi_1 = \pi_{-3,2} : x - z = 1$

5) Sia $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ il vettore direttore di r_2. Allora $\pi_2 : (v_1 \wedge v_2) \cdot X = (v_1 \wedge v_2) \cdot X_1$

$v_1 \wedge v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. $\pi_2 : x - z = -2$

6) Poniamo $X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in r_2$. $\operatorname{dist}(r_1, r_2) = \operatorname{dist}(X_1 - X_2, \langle v_1, v_2 \rangle) \overset{\langle v_1, v_2 \rangle = \text{piano}}{=} \| pr_{v_1 \wedge v_2}(X_1 - X_2) \|$

$= \dfrac{|(X_1 - X_2) \cdot v_1 \wedge v_2|}{\| v_1 \wedge v_2 \|} = \dfrac{3}{\sqrt{2}} = \dfrac{3}{2}\sqrt{2}$.

Esercizio 3. *Si consideri la seguente matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

1. *(1 punto) Calcolare* $\mathrm{rref}(A)$.
2. *(1 punto) Calcolare una base di* $\mathrm{Ker}(A)$.
3. *(1 punto) Stabilire se* $v = e_1 + e_2 - 2e_3$ *è un autovettore per* A.
4. *(1 punto) Calcolare la matrice* $P_{Col(A)}$ *di proiezione ortogonale su* $Col(A)$.
5. *(1 punto) Calcolare il polinomio caratteristico di* A.
6. *(1 punto) Stabilire se* A *è diagonalizzabile su* $\mathbb{R}$.
7. *(1 punto) Stabilire se* A *è diagonalizzabile su* $\mathbb{C}$.

1) $A \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{rref}(A).$

2) $\mathcal{B}_{Ker(A)} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right).$

3) $Av = A^1 + A^2 - 2A^3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix} \notin \langle v \rangle \Rightarrow v$ non è un autovettore per A.

4) $\mathcal{B}_{Col(A)} = (A^2, A^4)$. Poniamo $C = (A^2 | A^4) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $C^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

$$P_{Col(A)} = C(C^tC)^{-1}C^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{10} & \frac{1}{5} & \frac{1}{10} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} = \frac{1}{20} \begin{pmatrix} 7 & 9 & -3 & -1 \\ 9 & 13 & -1 & 3 \\ -3 & -1 & 7 & 9 \\ -1 & 3 & 9 & 13 \end{pmatrix}$$

5) $p_A(x) = x \det \begin{pmatrix} x-1 & 1 & -2 \\ 1 & x-1 & -1 \\ 1 & -1 & x-2 \end{pmatrix} = x \det \begin{pmatrix} x & 1 & -2 \\ x & x-1 & -1 \\ 0 & -1 & x-2 \end{pmatrix} = x \det \begin{pmatrix} x & 1 & -2 \\ 0 & x-2 & 1 \\ 0 & -1 & x-2 \end{pmatrix}$

$$= x^2 \cdot ((x-2)^2 + 1) = x^2(x^2 - 4x + 5) = x^2(x - (2+i))(x - (2-i))$$

6) A non è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$, poiché $Sp(A) = \{0, 2+i, 2-i\} \not\subset \mathbb{R}$.

7) A è diagonalizzabile su $\mathbb{C}$, poiché $ma(\lambda) = mg(\lambda)$ $\forall \lambda \in Sp(A)$. Infatti, $mg(0) = 2$ per il punto 2 e $1 = ma(2 \pm i) \geq mg(2 \pm i) > 0$.

Esercizio 4. *Siano V e U due spazi vettoriali reali e siano $\mathcal{B}_1 = (v_1, v_2, v_3)$ una base di V e $\mathcal{B}_2 = (u_1, u_2)$ una base di U. Siano $f : V \to U$ e $g : U \to V$ le applicazioni lineari tali che*

$$\begin{array}{lll} f(v_1) = u_1 + u_2, & f(v_2) = 2u_1 + 2u_2, & f(v_3) = u_1 - u_2. \\ g(u_1) = v_1 + v_2 + v_3, & g(u_2) = v_1 - v_2 + v_3. & \end{array}$$

1. *(1 punto) Calcolare $(g \circ f)(2v_1 - v_2 + 3v_3)$.*
2. *(1 punto) Scrivere la matrice A che rappresenta f nelle basi $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$.*
3. *(1 punto) Scrivere la matrice C che rappresenta g nelle basi $\mathcal{B}_2$ e $\mathcal{B}_1$.*
4. *(1 punto) Trovare una base per il nucleo di $g \circ f$.*
5. *(1 punto) Trovare una base per l'immagine di $f \circ g$.*
6. *(1 punto) Sia $\mathcal{C} = \{w_1, w_2, w_3\}$ dove*

$$w_1 = v_1 + 2v_2, \quad w_2 = -v_1 - v_2, \quad w_3 = v_1 + v_2 + v_3.$$

Dimostrare che $\mathcal{C}$ è una base di V.

7. *(1 punto) Scrivere la matrice D che rappresenta $g \circ f$ nella base $\mathcal{C}$.*

1) $f(2v_1 - v_2) = 0 \Rightarrow (g \circ f)(2v_1 - v_2 + 3v_3) = 3(g \circ f)(v_3) = 3g(u_1 - u_2) = 6v_2$.

2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$. 3) $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

4) $$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "F_{\mathcal{B}_1}"'] & U \arrow[r, "g"] \arrow[d, "F_{\mathcal{B}_2}"] & V \arrow[d, "F_{\mathcal{B}_1}"] \\ \mathbb{R}^3 \arrow[r, "A"] & \mathbb{R}^2 \arrow[r, "C"] & \mathbb{R}^3 \end{tikzcd}$$

$\operatorname{Ker} g \circ f \simeq \operatorname{Ker} CA = \operatorname{Ker} \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & 0 \end{pmatrix} = \operatorname{Ker} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$= \left\langle \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$. $\Rightarrow \mathcal{B}_{\operatorname{Ker} g \circ f} = (-2v_1 + v_2)$

5) $$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "g"] \arrow[d, "F_{\mathcal{B}_2}"'] & V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "F_{\mathcal{B}_1}"] & U \arrow[d, "F_{\mathcal{B}_2}"] \\ \mathbb{R}^2 \arrow[r, "C"] & \mathbb{R}^3 \arrow[r, "A"] & \mathbb{R}^2 \end{tikzcd}$$

$\operatorname{Im} f \circ g \simeq \operatorname{Col}(AC) = \operatorname{Col} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = \mathbb{R}^2$

$\Rightarrow \operatorname{Im} f \circ g = U$. $\mathcal{B}_{\operatorname{Im} f \circ g} = (u_1, u_2)$.

6) $B = \left(F_{\mathcal{B}_1}(w_1) \,|\, F_{\mathcal{B}_1}(w_2) \,|\, F_{\mathcal{B}_1}(w_3) \right) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. $\det B = 1 \Rightarrow \mathcal{C}$ è una base.

7) $$\begin{tikzcd} V \arrow[r, equal] \arrow[d, "F_{\mathcal{C}}"'] & V \arrow[r, "g \circ f"] \arrow[d, "F_{\mathcal{B}_1}"] & V \arrow[r, equal] \arrow[d, "F_{\mathcal{B}_1}"] & V \arrow[d, "F_{\mathcal{C}}"] \\ \mathbb{R}^3 \arrow[r, "B"] & \mathbb{R}^3 \arrow[r, "CA"] & \mathbb{R}^3 & \mathbb{R}^3 \arrow[l, "B"'] \end{tikzcd}$$

$D = B^{-1} C A B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} -10 & 6 & -4 \\ -10 & 6 & -4 \\ 10 & -6 & 6 \end{pmatrix}$

Esercizio 5. *Consideriamo la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \\ 4 & 8 & 12 & 16 \end{pmatrix}$$

1. *(1 punto) Dimostrare che A è ortogonalmente diagonalizzabile.*
2. *(1 punto) Stabilire se il vettore $v = e_1 + e_2$ è un autovettore per A.*
3. *(1 punto) Calcolare una base del nucleo di A.*
4. *(1 punto) Trovare una base ortogonale del nucleo di A utilizzando l'algoritmo di Gram-Schmidt.*
5. *(1 punto) Calcolare una base di $ker(A)^\perp$.*
6. *(1 punto) Utilizzando i punti precedenti, determinare lo spettro di A senza calcolare il suo polinomio caratteristico.*
7. *(1 punto) Trovare una matrice ortogonale B ed una matrice diagonale D tali che $B^tAB = D$.*

1) Dato che $A = A^t$, essa è ortogonalmente diagonalizzabile (Teo Spettrale).

2) $Av = A^1 + A^2 = A^3 \notin \langle v \rangle \Rightarrow v$ non è un autovettore per A.

3) Notiamo che $A^2 = 2A^1$, $A^3 = 3A^1$, $A^4 = 4A^1$ e $A^1 \neq 0_{\mathbb{R}^4}$. Per cui, $2e_1 - e_2$, $3e_1 - e_3$, $4e_1 - e_4 \in \mathrm{Ker}A$. Poiché sono lin. ind. e $\dim \mathrm{Ker}A < 4$, ne segue che $\dim \mathrm{Ker}A = 3$ ed essi formano una base di Ker A.

4) $v_1 := \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_2 := \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_3 := \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. $F_1 = v_1$. $F_2 = v_2 - \frac{v_2 \cdot F_1}{F_1 \cdot F_1} F_1 = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$$F_3 = v_3 - \frac{v_3 \cdot F_1}{F_1 \cdot F_1} F_1 - \frac{v_3 \cdot F_2}{F_2 \cdot F_2} F_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{8}{5}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{\cancel{12}^{\,6}}{\cancel{70}_{\,35}}\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{35}\begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ 30 \\ -35 \end{pmatrix} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \\ -7 \end{pmatrix}$$

5) $(\mathrm{Ker}\,A)^\perp = \mathrm{Col}(A^t) \underset{A=A^t}{=} \mathrm{Col}(A) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right\rangle$. $1+4+9+16 = 30$

6) $A\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = 30\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathrm{Sp}(A) = \{0, 30\}$.

7) $$B = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} & 3/\sqrt{70} & 2/\sqrt{105} & 1/\sqrt{30} \\ -1/\sqrt{5} & 6/\sqrt{70} & 4/\sqrt{105} & 2/\sqrt{30} \\ 0 & -5/\sqrt{70} & 6/\sqrt{105} & 3/\sqrt{30} \\ 0 & 0 & -7/\sqrt{105} & 4/\sqrt{30} \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 30 \end{pmatrix}.$$