

Nome, Cognome e Matricola

---

Esame scritto di Geometria  
Ingegneria per l'Ambiente ed il Territorio  
Quarto appello a.a. 2022/23

26 giugno 2023

**Esercizio 1.** In  $(\mathbb{R}^2, \cdot)$  consideriamo i due punti  $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  e  $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ .

1. (1 punto) Scrivere equazioni parametriche e cartesiane della retta  $r$  passante per  $A$  e  $B$ .
2. (1 punto) Calcolare la pendenza  $m$  della retta  $r$ .
3. (1 punto) Calcolare il punto medio  $M$  del segmento  $\overline{AB}$ .
4. (1 punto) Calcolare equazioni cartesiane dell'asse del segmento  $\overline{AB}$ .
5. (1 punto) Scrivere equazioni parametriche e cartesiane della circonferenza  $\mathcal{C}$  avente il segmento  $\overline{AB}$  come diametro.
6. (1 punto) Descrivere il seguente luogo geometrico:

$$\mathcal{R} := \{C \in \mathbb{R}^2 \mid \text{il triangolo di vertici } A, B, C \text{ è rettangolo in } C\}.$$

7. (1 punto) Descrivere il seguente luogo geometrico

$$\mathcal{S} := \{C \in \mathbb{R}^2 \mid \text{il triangolo di vertici } A, B, C \text{ ha area uguale a } 2\}.$$

Fare un disegno che illustri la situazione.

**Esercizio 2.** In  $(\mathbb{R}^3, \cdot)$  consideriamo le due rette

$$r_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle, \quad r_2 : \begin{cases} x + 2y - z = 1, \\ 2x + 3y - 2z = 2. \end{cases}$$

1. (1 punto) Stabilire la posizione reciproca di  $r_1$  ed  $r_2$ , senza cambiare la loro forma.
2. (1 punto) Calcolare equazioni cartesiane della retta  $r_1$ .
3. (1 punto) Calcolare equazioni parametriche della retta  $r_2$ .
4. (1 punto) Usare il fascio di piani per  $r_2$  per trovare equazioni cartesiane del piano  $\pi_1$  passante per  $r_2$  e parallelo alla retta  $r_1$ .
5. (1 punto) Usare il prodotto vettoriale per trovare equazioni cartesiane del piano  $\pi_2$  passante per  $r_1$  e parallelo alla retta  $r_2$ .
6. (2 punti) Calcolare la distanza tra  $r_1$  ed  $r_2$ .

**Esercizio 3.** Si consideri la seguente matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

1. (1 punto) Calcolare  $\text{rref}(A)$ .
2. (1 punto) Calcolare una base di  $\text{Ker}(A)$ .
3. (1 punto) Stabilire se  $v = e_1 + e_2 - 2e_3$  è un autovettore per  $A$ .
4. (1 punto) Calcolare la matrice  $P_{\text{Col}(A)}$  di proiezione ortogonale su  $\text{Col}(A)$ .
5. (1 punto) Calcolare il polinomio caratteristico di  $A$ .
6. (1 punto) Stabilire se  $A$  è diagonalizzabile su  $\mathbb{R}$ .
7. (1 punto) Stabilire se  $A$  è diagonalizzabile su  $\mathbb{C}$ .

**Esercizio 4.** Siano  $V$  e  $U$  due spazi vettoriali reali e siano  $\mathcal{B}_1 = (v_1, v_2, v_3)$  una base di  $V$  e  $\mathcal{B}_2 = (u_1, u_2)$  una base di  $U$ . Siano  $f : V \rightarrow U$  e  $g : U \rightarrow V$  le applicazioni lineari tali che

$$\begin{aligned} f(v_1) &= u_1 + u_2, & f(v_2) &= 2u_1 + 2u_2, & f(v_3) &= u_1 - u_2. \\ g(u_1) &= v_1 + v_2 + v_3, & g(u_2) &= v_1 - v_2 + v_3. \end{aligned}$$

1. (1 punto) Calcolare  $(g \circ f)(2v_1 - v_2 + 3v_3)$ .
2. (1 punto) Scrivere la matrice  $A$  che rappresenta  $f$  nelle basi  $\mathcal{B}_1$  e  $\mathcal{B}_2$ .
3. (1 punto) Scrivere la matrice  $C$  che rappresenta  $g$  nelle basi  $\mathcal{B}_2$  e  $\mathcal{B}_1$ .
4. (1 punto) Trovare una base per il nucleo di  $g \circ f$ .
5. (1 punto) Trovare una base per l'immagine di  $f \circ g$ .
6. (1 punto) Sia  $\mathcal{C} = \{w_1, w_2, w_3\}$  dove

$$w_1 = v_1 + 2v_2, \quad w_2 = -v_1 - v_2, \quad w_3 = v_1 + v_2 + v_3.$$

Dimostrare che  $\mathcal{C}$  è una base di  $V$ .

7. (1 punto) Scrivere la matrice  $D$  che rappresenta  $g \circ f$  nella base  $\mathcal{C}$ .

**Esercizio 5.** *Consideriamo la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \\ 4 & 8 & 12 & 16 \end{pmatrix}$$

1. (1 punto) *Dimostrare che  $A$  è ortogonalmente diagonalizzabile.*
2. (1 punto) *Stabilire se il vettore  $v = e_1 + e_2$  è un autovettore per  $A$ .*
3. (1 punto) *Calcolare una base del nucleo di  $A$ .*
4. (1 punto) *Trovare una base ortogonale del nucleo di  $A$  utilizzando l'algoritmo di Gram-Schmidt.*
5. (1 punto) *Calcolare una base di  $\ker(A)^\perp$ .*
6. (1 punto) *Utilizzando i punti precedenti, determinare lo spettro di  $A$  senza calcolare il suo polinomio caratteristico.*
7. (1 punto) *Trovare una matrice ortogonale  $B$  ed una matrice diagonale  $D$  tali che  $B^t AB = D$ .*