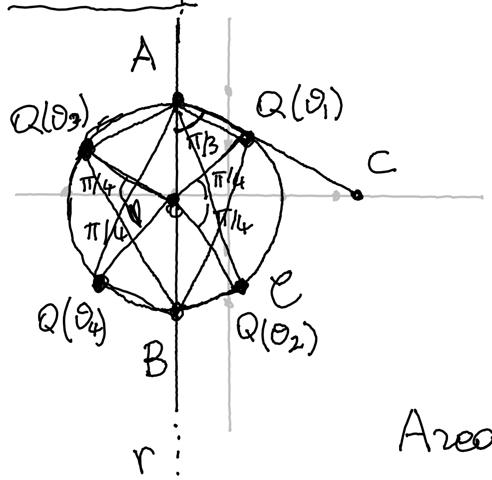
Esercizio 1. *In* $(\mathbb{R}^2, \cdot)$ *si considerino i seguenti due punti:*

$$A = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

1. *(2 punti) Calcolare equazioni parametriche e cartesiane della retta* r *passante per* A *e* B.
2. *(2 punti) Calcolare le equazioni parametriche e cartesiane della circonferenza* $\mathcal{C}$ *avente il segmento* $\overline{AB}$ *come diametro.*
3. *(2 punti) Trovare il punto* C *ottenuto ruotando di* $\pi/3$ *in senso antiorario il punto* B *attorno al punto* A.
4. *(1 punto) Trovare tutti i punti* $Q(\theta)$ *della circonferenza* $\mathcal{C}$ *tali che il triangolo di vertici* A, B *e* $Q(\theta)$ *abbia area uguale a* $2\sqrt{2}$ *e disegnarli.*

Fare un disegno *che illustri la situazione.*

Soluzione:



1) $r: \ x = -1$, $\ r = B + \langle \overrightarrow{BA} \rangle = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} \right\rangle$

2) $\mathcal{C}: \ (x+1)^2 + y^2 = 4$. $\ \mathcal{C} = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} \ \middle| \ \theta \in [0, 2\pi) \right\}$.

3) $C = A + R_{\frac{\pi}{3}}(B-A) = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\sqrt{3}-1 \\ 0 \end{pmatrix}$

4) $Q(\theta) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cos\theta - 1 \\ 2\sin\theta \end{pmatrix}$

$$\text{Area } \widehat{ABQ(\theta)} = \frac{1}{2} \left| \det \left(A-B \mid Q(\theta)-B \right) \right| = \frac{1}{2} \left| \det \begin{pmatrix} 0 & 2\cos\theta \\ 4 & 2\sin\theta+2 \end{pmatrix} \right|$$

$$= \frac{1}{2} \left| 4 \det \begin{pmatrix} 0 & \cos\theta \\ 2 & \sin\theta+1 \end{pmatrix} \right| = 4|\cos\theta|$$

$$4|\cos\theta| = 2\sqrt{2} \iff |\cos\theta| = \frac{\sqrt{2}}{2} \iff \theta \in \left\{ \theta_1 = \frac{\pi}{4}, \theta_2 = \frac{7}{4}\pi, \theta_3 = \frac{3}{4}\pi, \theta_4 = \frac{5}{4}\pi \right\}$$

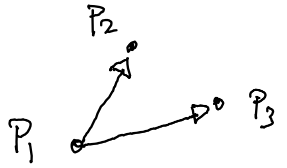
Esercizio 2. *In* $(\mathbb{R}^3, \cdot)$ *consideriamo i quattro punti:*

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad P_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

1. *(1 punto) Dimostrare che i tre punti* P_1*,* P_2 *e* P_3 *non sono allineati.*
2. *(2 punti) Trovare l'equazione cartesiana e parametrica della retta* r *passante per* P_1 *e* P_2*.*
3. *(1 punto) Scrivere l'equazione del fascio di piani per* r*.*
4. *(1 punto) Trovare equazioni cartesiane del piano* π *per* P_1*,* P_2 *e* P_3*.*
5. *(2 punti) Calcolare la distanza del punto* Q *dal piano* π*.*

Soluzione: 1) $P_2 - P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$, $P_3 - P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. $(P_2 - P_1) \wedge (P_3 - P_1) = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \neq 0_{\mathbb{R}^3}$

Quindi i due vettori $\vec{P_1P_2}$ e $\vec{P_1P_3}$ sono linearmente indipendenti. Ne segue che i tre punti P_1, P_2, P_3 non sono allineati



2) $r = P_1 + \langle P_2 - P_1 \rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} \right\rangle : \begin{cases} 2x + y = 3 \\ 2x + z = 3 \end{cases}$

3) $\pi_{\alpha, \beta} : \alpha(2x + y - 3) + \beta(2x + z - 3) = 0 \qquad (\alpha, \beta) \neq (0,0)$.

4) $P_3 \in \pi_{\alpha,\beta} \iff \alpha(4 + 2 - 3) + \beta(4 + 1 - 3) = 0 \iff 3\alpha + 2\beta = 0 \iff (\alpha, \beta)$ è un multiplo di $(-2, 3)$. Il piano cercato è

$\pi = \pi_{(-2,3)} : -2(2x + y - 3) + 3(2x + z - 3) = 0$ ovvero

$\pi = \pi_{(-2,3)} : 2x - 2y + 3z = 3$

5) $\operatorname{dist}(Q, \pi) = \dfrac{|2 \cdot 1 - 2 \cdot 0 + 3 \cdot (-1) - 3|}{\sqrt{4 + 4 + 9}} = \dfrac{4}{\sqrt{17}}$

Esercizio 3. *Si consideri la seguente matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. *(2 punti) Calcolare il determinante e la traccia di A.*
2. *(2 punti) Calcolare il polinomio caratteristico di A.*
3. *(2 punto) Stabilire se A è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$ e nel caso lo sia trovare due matrici B e D, invertibile e diagonale rispettivamente, tali che $B^{-1}AB = D$.*
4. *(1 punto) Trovare una matrice C tale che $C^2 = A$.*

Soluzione: 1) $\det A = 2 \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2$. $\operatorname{Tr} A = 0+3+1 = 4$

2) $P_A(x) = x^3 - \operatorname{Tr}A\, x^2 + \frac{1}{2}\left((\operatorname{Tr}A)^2 - \operatorname{Tr}(A^2)\right)x - \det A = x^3 - 4x^2 + \frac{1}{2}\left(16 - (-2+7+1)\right)x - 2$

$= x^3 - 4x^2 + 5x - 2$.

3) Osserviamo che $P_A(1) = 0$. Dividiamo $P_A(x)$ per $(x-1)$:

$$\begin{array}{l|l} x^3 - 4x^2 + 5x - 2 & x-1 \\ \hline x^3 - x^2 & x^2 - 3x + 2 \\ \hline -3x^2 + 5x - 2 & \\ -3x^2 + 3x & \\ \hline 2x - 2 & \end{array}$$

$P_A(x) = (x-1)(x^2 - 3x + 2)$.

Le radici di $x^2 - 3x + 2$ sono $x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \begin{cases} 2 \\ 1 \end{cases}$.

Otteniamo $P_A(x) = (x-2)(x-1)^2$.

$V_1(A) = \operatorname{Ker}(\mathbb{1}_3 - A) = \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \operatorname{Ker}(1 \ -1 \ -1) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$.

$\Rightarrow mg_A(1) = ma_A(1) = 2 \Rightarrow A$ è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$.

$V_2(A) = \operatorname{Ker}(2\mathbb{1}_3 - A) = \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$

$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

4) $B^{-1}AB = D \Rightarrow A = BDB^{-1}$. $E = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & \sqrt{2} \end{pmatrix}$ è t.c. $E^2 = D$. Quindi $C = BEB^{-1}$ soddisfa $C^2 = BE^2B^{-1} = BDB^{-1} = A$. Poiché $B^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2-\sqrt{2} & -1+\sqrt{2} & -1+\sqrt{2} \\ 2-2\sqrt{2} & -1+2\sqrt{2} & -2+2\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Esercizio 4. *Studiare il seguente sistema lineare nelle variabili $x_1, \cdots, x_5$*

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 - x_5 = 1 \\ 2x_1 + 4x_2 - 7x_3 + 3x_4 - x_5 = 2 \\ 2x_3 - 2x_4 + x_5 = 3 \end{cases}$$

Verrà dato il seguente punteggio:

1. *(2 punti) per la forma a scala ridotta della matrice associata.*
2. *(1 punto) per una soluzione particolare X_0 del sistema.*
3. *(2 punti) per le soluzioni-base del sistema omogeneo associato.*
4. *(2 punti) per lo spazio delle soluzioni scritto in forma parametrica.*

Soluzione:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -3 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -7 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 1 & 3 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -3 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 1 & 3 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -3 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 3 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -3 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -3 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & -2 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Il sistema è equivalente al sistema a scala ridotta:

$$\begin{cases} x_1 = 5 - 2x_2 + 2x_4 \\ x_3 = 1 + x_4 \\ x_5 = 1 \end{cases}$$

Otteniamo che lo spazio delle soluzioni è non vuoto ed è il seguente sottospazio affine di $\mathbb{R}^5$

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle .$$

Esercizio 5. *Si consideri il seguente piano di* $(\mathbb{R}^4, \cdot)$.

$$U \div \begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

1. *(2 punti) Trovare una base* U.
2. *(2 punti) Calcolare la matrice* P_U *di proiezione ortogonale su* U.
3. *(2 punti) Calcolare la distanza del punto* $Q = (2, -4, 2, 2)^t$ *da* U.
4. *(1 punto) Calcolare una base di* $U^{\perp}$.

Soluzioni:

1) $U = \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$

2) $A := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$ $P_U = A(A^tA)^{-1}A^t = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

3) $pr_U(Q) = P_U Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\operatorname{dist}(Q, U) = \| Q - P_U Q \| = \left\| \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = 3\sqrt{2}$

4) $\mathcal{B}_{U^\perp} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right).$