

Nome, Cognome e Matricola

Esame scritto di Geometria 1
Ingegneria per l'ambiente ed il territorio
Docente: Giovanni Cerulli Irelli
Quinto appello a.a. 2022/23

18 settembre 2023

Esercizio 1. In (\mathbb{R}^2, \cdot) si considerino i seguenti due punti:

$$A = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

1. (2 punti) Calcolare equazioni parametriche e cartesiane della retta r passante per A e B .
2. (2 punti) Calcolare le equazioni parametriche e cartesiane della circonferenza \mathcal{C} avente il segmento \overline{AB} come diametro.
3. (2 punti) Trovare il punto C ottenuto ruotando di $\pi/3$ in senso antiorario il punto B attorno al punto A .
4. (1 punto) Trovare tutti i punti $Q(\theta)$ della circonferenza \mathcal{C} tali che il triangolo di vertici A , B e $Q(\theta)$ abbia area uguale a $2\sqrt{2}$ e disegnarli.

Fare un disegno che illustri la situazione.

Esercizio 2. In (\mathbb{R}^3, \cdot) consideriamo i quattro punti:

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad P_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

1. (1 punto) Dimostrare che i tre punti P_1 , P_2 e P_3 non sono allineati.
2. (2 punti) Trovare l'equazione cartesiana e parametrica della retta r passante per P_1 e P_2 .
3. (1 punto) Scrivere l'equazione del fascio di piani per r .
4. (1 punto) Trovare equazioni cartesiane del piano π per P_1 , P_2 e P_3 .
5. (2 punti) Calcolare la distanza del punto Q dal piano π .

Esercizio 3. *Si consideri la seguente matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. (2 punti) *Calcolare il determinante e la traccia di A .*
2. (2 punti) *Calcolare il polinomio caratteristico di A .*
3. (2 punto) *Stabilire se A è diagonalizzabile su \mathbb{R} e nel caso lo sia trovare due matrici B e D , invertibile e diagonale rispettivamente, tali che $B^{-1}AB = D$.*
4. (1 punto) *Trovare una matrice C tale che $C^2 = A$.*

Esercizio 4. *Studiare il seguente sistema lineare nelle variabili x_1, \dots, x_5*

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 - x_5 = 1 \\ 2x_1 + 4x_2 - 7x_3 + 3x_4 - x_5 = 2 \\ 2x_3 - 2x_4 + x_5 = 3 \end{cases}$$

Verrà dato il seguente punteggio:

- 1. (2 punti) per la forma a scala ridotta della matrice associata.*
- 2. (1 punto) per una soluzione particolare X_0 del sistema.*
- 3. (2 punti) per le soluzioni-base del sistema omogeneo associato.*
- 4. (2 punti) per lo spazio delle soluzioni scritto in forma parametrica.*

Esercizio 5. Si consideri il seguente piano di (\mathbb{R}^4, \cdot) .

$$U : \begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

1. (2 punti) Trovare una base U .
2. (2 punti) Calcolare la matrice P_U di proiezione ortogonale su U .
3. (2 punti) Calcolare la distanza del punto $Q = (2, -4, 2, 2)^t$ da U .
4. (1 punto) Calcolare una base di U^\perp .