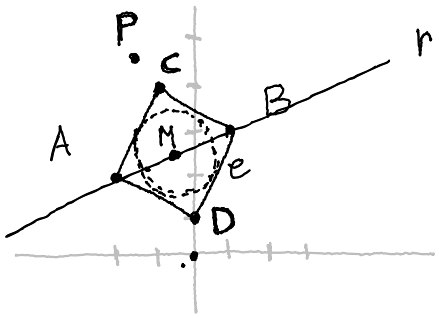
Esercizio 1. *In* $(\mathbb{R}^2, \cdot)$ *consideriamo i punti* $A = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ *e* $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

1. *(2 punti) Calcolare equazioni parametriche e cartesiane della retta r passante per A e B.*
2. *(1 punto) Calcolare la pendenza m della retta r.*
3. *(1 punto) Calcolare il punto P ottenuto riflettendo ortogonalmente l'origine attraverso la retta r.*
4. *(2 punti) Trovare un punto C ed un punto D tali che il quadrilatero $\mathcal{Q}$ di vertici A, B, C e D sia un quadrato avente il segmento $\overline{AB}$ come diagonale.*
5. *(1 punto) Trovare equazioni parametriche e cartesiane della circonferenza $\mathcal{C}$ inscritta nel quadrato $\mathcal{Q}$.*

Fare un disegno che illustri la situazione.



1. $r = A + \langle B - A \rangle = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle : \; x - 3y = -8$

2. $r: \; y = \frac{1}{3}x + \frac{8}{3} \Rightarrow m = \frac{1}{3}$

3. $Q_m = \frac{1}{1+m^2} \begin{pmatrix} 1-m^2 & 2m \\ 2m & m^2-1 \end{pmatrix} \Rightarrow Q_{\frac{1}{3}} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$

$P = A + Q_{\frac{1}{3}}(-A) = A - Q_{\frac{1}{3}} A = \begin{pmatrix} -\frac{8}{5} \\ \frac{24}{5} \end{pmatrix} = \frac{8}{5} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

4) $M = \frac{1}{2}(A+B) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$: punto medio di $\overline{AB}$.

$\vec{MC} = Q_{\frac{\pi}{2}}(\vec{MB}) \Rightarrow C = M + Q_{\frac{\pi}{2}}(B - M) = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$

$\vec{MD} = -\vec{MC} \Rightarrow D = 2M - C = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

5) raggio $r = \frac{1}{2} \|\vec{AC}\| = \frac{\sqrt{5}}{2}$. centro $= M = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$.

$\mathcal{C} = \left\{ M + r \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} \;\middle|\; \theta \in [0, 2\pi) \right\} : \; \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}$

Esercizio 2. *In $\mathbb{R}^3$ si considerino:*

$$v_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix} \quad Q = \begin{pmatrix}3\\-1\\1\end{pmatrix}$$

1. *(1 punto) Calcolare equazioni cartesiane della retta r passante per il punto P e parallela a v_1.*
2. *(1 punto) Scrivere le equazioni del fascio di piani per la retta r.*
3. *(1 punto) Calcolare l'equazione cartesiana del piano π contenente r e passante per il punto Q.*
4. *(1 punto) Calcolare $v_1 \wedge v_2$.*
5. *(1 punto) Calcolare equazioni cartesiane del piano σ passante per P ed avente vettori direttori v_1 e v_2.*
6. *(1 punto) Calcolare equazioni parametriche della retta s passante per Q e ortogonale al piano σ.*
7. *(1 punto) Calcolare l'area del triangolo di vertici P, $P+v_1$, $P+v_2$.*

1) $r = P + \langle v_1 \rangle = \begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \rangle$. $\mathrm{Ker}(1\,1\,1) = \langle \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} \rangle \Rightarrow r: \begin{cases} x-y=1 \\ x-z=3 \end{cases}$

2) $\pi_{\alpha,\beta}: \quad \alpha(x-y-1) + \beta(x-z-3) = 0$

3) $Q \in \pi_{\alpha,\beta} \iff 3\alpha - \beta = 0 \Rightarrow \pi = \pi_{1,3}: \ 4x - y - 3z = 10$

4) $v_1 \wedge v_2 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\-1\\-2\end{pmatrix}$

5) $\sigma: \ v_1 \wedge v_2 \cdot X = v_1 \wedge v_2 \cdot P$ ovvero $\sigma: \ 3x - y - 2z = 7$

6) $s = Q + \langle v_1 \wedge v_2 \rangle = \begin{pmatrix}3\\-1\\1\end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix}3\\-1\\-2\end{pmatrix} \rangle$

7) $\frac{1}{2} \| v_1 \wedge v_2 \| = \frac{1}{2} \left\| \begin{pmatrix}3\\-1\\-2\end{pmatrix} \right\| = \frac{\sqrt{14}}{2}$.

Esercizio 3. *Si consideri la seguente matrice*

$$A = \begin{pmatrix} -7 & 9 & -9 \\ -9 & 11 & -9 \\ -3 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

1. *(1 punto) Calcolare la traccia di A.*
2. *(2 punti) Calcolare il determinante di A.*
3. *(1 punto) Stabilire se il vettore $v = (1, 1, 0)^t$ è un autovettore per A.*
4. *(1 punto) Calcolare il polinomio caratteristico di A.*
5. *(2 punti) Stabilire se A è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$ e nel caso lo sia trovare una matrice invertibile B ed una matrice diagonale D tali che $B^{-1}AB = D$.*

1) $\operatorname{Tr} A = 3$

2) $\det A = \det \begin{pmatrix} -7 & 9 & -9 \\ -9 & 11 & -9 \\ -3 & 3 & -1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 2 & 9 & -9 \\ 0 & 11 & -9 \\ -2 & 3 & -1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 2 & 9 & -9 \\ 0 & 11 & -9 \\ 0 & 12 & -10 \end{pmatrix} =$

$= 2 \det \begin{pmatrix} 11 & -9 \\ 12 & -10 \end{pmatrix} = 2 \det \begin{pmatrix} 11 & -9 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = 2 \det \begin{pmatrix} 2 & -9 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -4$

3) $Av = A^1 + A^2 = \begin{pmatrix} -7 \\ -9 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 9 \\ 11 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 2v \Rightarrow v$ è un autovettore per A di autovalore 2.

4) $P_A(x) = \det(x \mathbb{1}_3 - A) = \det \begin{pmatrix} x+7 & -9 & 9 \\ 9 & x-11 & 9 \\ 3 & -3 & x+1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} x-2 & -9 & 9 \\ 0 & x-11 & 9 \\ -x+2 & -3 & x+1 \end{pmatrix}$

$= \det \begin{pmatrix} x-2 & -9 & 9 \\ 0 & x-11 & 9 \\ 0 & -12 & x+10 \end{pmatrix} = (x-2) \det \begin{pmatrix} x-11 & 9 \\ -12 & x+10 \end{pmatrix} = (x-2) \det \begin{pmatrix} x-2 & 9 \\ x-2 & x+10 \end{pmatrix}$

$= (x-2) \det \begin{pmatrix} x-2 & 9 \\ 0 & x+1 \end{pmatrix} = (x-2)^2 (x+1).$

5) $Sp(A) = \{-1, 2\}$. $V_{-1}(A) = \operatorname{Ker}(-\mathbb{1}_3 - A) = \operatorname{Ker} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} = \left< \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right>$

$V_2(A) = \operatorname{Ker}(2\mathbb{1}_3 - A) = \operatorname{Ker}(1 \ -1 \ 1) = \left< \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right>.$

A è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$. $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Esercizio 4. *Si consideri lo spazio vettoriale* $V = \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ *dei polinomi di grado minore o uguale di 2 a coefficienti reali. Denotiamo con* $\mathcal{C} = (1, x, x^2)$ *la base standard di* V. *Sia* $T : V \to V$ *l'applicazione lineare*

$$T(p(x)) = p(x+1) - p(x-1).$$

Si consideri l'insieme $\mathcal{B} = (1, 1+x, 1+x+x^2)$.

1. *(1 punto) Calcolare* $T(2x^2 - x + 1)$.
2. *(1 punto) Usando la definizione, dimostrare che* T *è lineare.*
3. *(1 punto) Scrivere la matrice* A *che rappresenta* T *nella base* $\mathcal{C}$ *(sia in partenza che in arrivo).*
4. *(1 punto) Trovare una base per* $\mathrm{Ker}(T)$.
5. *(1 punto) Trovare una base per* $\mathrm{Im}(T)$.
6. *(1 punto) Dimostrare che* $\mathcal{B}$ *è una base di* V.
7. *(1 punto) Scrivere la matrice* C *che rappresenta* T *nella base* $\mathcal{B}$ *(sia in partenza che in arrivo)*

1) $T(2x^2-x+1) = \left[2(x+1)^2-(x+1)+1\right] - \left[2(x-1)^2-(x-1)+1\right] = 8x-2.$

2) $T(\alpha p+\beta q) = (\alpha p+\beta q)(x+1) - (\alpha p+\beta q)(x-1) =$
$= \alpha\left(p(x+1)-p(x-1)\right) + \beta\left(q(x+1)-q(x-1)\right) = \alpha T(p)+\beta T(q)$
$\forall p,q \in V, \ \forall \alpha,\beta \in \mathbb{R}.$

3) $T(1)=0, \ T(x)=2, \ T(x^2)=4x \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

4) $\mathrm{Ker}\, A = \langle e_1 \rangle \Rightarrow \mathrm{Ker}\, T = \langle 1 \rangle$

5) $\mathrm{Col}\, A = \langle e_1, e_2 \rangle \Rightarrow \mathrm{Im}\, T = \langle 1, x \rangle$

6) $|\mathcal{B}| = 3 = \dim V$ e $\mathcal{B}$ è lin. ind. poiché i suoi elementi hanno gradi distinti

7)
$$\begin{tikzcd} V \arrow[d, "F_{\mathcal{B}}"'] & = & V \arrow[r, "T"] \arrow[d, "F_e"] & V \arrow[d, "F_e"] & = & V \arrow[d, "F_{\mathcal{B}}"] \\ \mathbb{R}^3 \arrow[rr, "B"] & & \mathbb{R}^3 \arrow[r, "A"] & \mathbb{R}^3 & & \mathbb{R}^3 \arrow[ll, "B"'] \end{tikzcd}$$

$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

$C = B^{-1} A B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Esercizio 5. *Si consideri il seguente sistema lineare nelle cinque variabili reali $x_1, \cdots, x_5$ al variare del parametro reale k:*

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + (2k-3)x_3 + (k+3)x_4 - 3kx_5 = -3k-3 \\ 2x_1 + x_2 + (2k+6)x_3 + (3-2k)x_4 - kx_5 = 2k-1 \\ -x_1 - 3x_3 + kx_4 - kx_5 = -2k-1 \end{cases}$$

1. *(1 punto) Scrivere la matrice completa $(A|b)$ del sistema.*
2. *(2 punti) Trovare la forma a scala ridotta di $(A|b)$ al variare di $k \in \mathbb{R}$.*
3. *(1 punto) Trovare tutti i valori di k per i quali il sistema è risolubile.*
4. *(1 punto) Per i valori di k per i quali il sistema è risolubile calcolarne una soluzione particolare.*
5. *(1 punto) Per i valori di k per i quali il sistema è risolubile calcolare le soluzioni-base del sistema omogeneo associato.*
6. *(1 punto) Per i valori di k per i quali il sistema è risolubile scrivere le equazioni parametriche dello spazio delle soluzioni.*

1) $(A|b) = \left(\begin{array}{ccccc|c} -1 & 1 & 2K-3 & K+3 & -3K & -3K-3 \\ 2 & 1 & 2K+6 & 3-2K & -K & 2K-1 \\ -1 & 0 & -3 & K & -K & -2K-1 \end{array}\right)$

2) $(A|b) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 3 & -K & 0 & K \\ 0 & 1 & 2K & 3 & 0 & K \\ 0 & 0 & 0 & 0 & K & K+1 \end{array}\right)$ Per cui,

se $K \neq 0$, $\text{rref}((A|b)) = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 3 & -K & 0 & K \\ 0 & 1 & 2K & 3 & 0 & K \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{K+1}{K} \end{array}\right)$

se $K = 0$, $\text{rref}((A|b)) = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$

3) Il sistema è risolubile $\Leftrightarrow K \neq 0$

4) Poniamo le variabili libere X_3 e X_4 uguali a zero: $X_0 = \begin{pmatrix} K \\ K \\ 0 \\ 0 \\ \frac{K+1}{K} \end{pmatrix}$

5) $V_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ -2K \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} K \\ -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$X_3 = 1, X_4 = 0$ $\qquad$ $X_3 = 0, X_4 = 1$

6) $X_0 + \langle v_1, v_2 \rangle$.