Nome, Cognome e Matricola

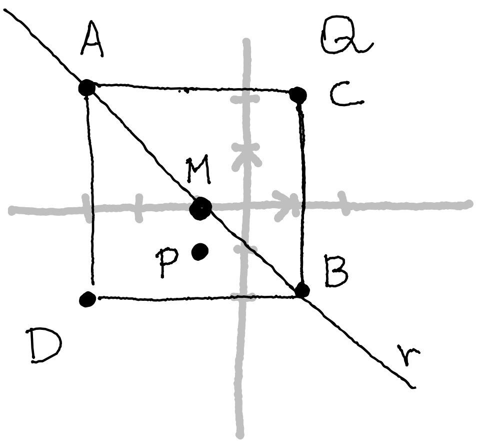
Esame scritto di Geometria
Secondo appello straordinario 2022/2023
Docente: Giovanni Cerulli Irelli

20 ottobre 2023

Esercizio 1. *In* $(\mathbb{R}^2, \cdot)$ *consideriamo i punti* $A = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ *e* $B = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

1. *(2 punti) Calcolare equazioni parametriche e cartesiane della retta* r *passante per* A *e* B.
2. *(1 punto) Calcolare la pendenza* m *della retta* r.
3. *(1 punto) Calcolare il punto* P *ottenuto riflettendo ortogonalmente l'origine attraverso la retta* r.
4. *(2 punti) Trovare un punto* C *ed un punto* D *tali che il quadrilatero* $\mathcal{Q}$ *di vertici* A, B, C *e* D *sia un quadrato avente il segmento* $\overline{AB}$ *come diagonale.*
5. *(1 punto) Trovare equazioni parametriche e cartesiane della circonferenza* $\mathcal{C}$ *inscritta nel quadrato* $\mathcal{Q}$.

Fare un disegno che illustri la situazione.



1) $r = A + \langle B-A \rangle = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \end{pmatrix} \rangle : x + y = -1$

2) $m = -1$

3) $Q_m = \frac{1}{1+m^2} \begin{pmatrix} 1-m^2 & 2m \\ 2m & m^2-1 \end{pmatrix} \Rightarrow Q_{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

$P = A + Q_{-1}(-A) = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

4) $M = \frac{1}{2}(A+B) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

$C = M + R_{\frac{\pi}{2}}(B-M) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$D = M + Q_{-1}(C-M) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix}$

5) centro $= M$, raggio $= 2 = r$

$\mathcal{C} = \left\{ M + 2 \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} \,\middle|\, \theta \in [0, 2\pi) \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} \,\middle|\, \theta \in [0, 2\pi) \right\}$

$\mathcal{C} : (x+1)^2 + y^2 = 4$

Esercizio 2. *In $\mathbb{R}^3$ si considerino:*

$$v_1 = \begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix} \quad Q = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

1. *(1 punto) Calcolare equazioni cartesiane della retta r passante per il punto P e parallela a v_1.*
2. *(1 punto) Scrivere le equazioni del fascio di piani per la retta r.*
3. *(1 punto) Calcolare l'equazione cartesiana del piano π contenente r e passante per il punto Q.*
4. *(1 punto) Calcolare $v_1 \wedge v_2$.*
5. *(1 punto) Calcolare equazioni cartesiane del piano σ passante per P ed avente vettori direttori v_1 e v_2.*
6. *(1 punto) Calcolare equazioni parametriche della retta s passante per Q e ortogonale al piano σ.*
7. *(1 punto) Calcolare l'area del triangolo di vertici P, $P+v_1$, $P+v_2$.*

<u>Sol.</u>: 1) $r = P + \langle v_1 \rangle : \begin{cases} 2x - y = 3 \\ 2x - z = 5 \end{cases}$

2) $\alpha(2x-y-3) + \beta(2x-z-5) = 0 \qquad (\alpha,\beta) \neq (0,0)$.

3) $\alpha(2-1-3) + \beta(2-1-5) = 0 \iff -2\alpha - 4\beta = 0$

$\iff \alpha = -2\beta$. $\quad \pi : -2(2x-y-3) + (2x-z-5) = 0$ ovvero

$\pi : \; -2x + 2y - z = -1 \quad$ o $\quad \pi : \; 2x - 2y + z = 1$

4) $v_1 \wedge v_2 = \begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-4\\1\\1\end{pmatrix}$

5) $\sigma : (v_1 \wedge v_2) \cdot X = (v_1 \wedge v_2) \cdot P$ ovvero $\sigma : -4x + y + z = -8$

6) $s = Q + \langle v_1 \wedge v_2 \rangle = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix}-4\\1\\1\end{pmatrix} \right\rangle$

7) $\frac{1}{2} \| v_1 \wedge v_2 \| = \frac{1}{2} \sqrt{18} = 3\frac{\sqrt{2}}{2}$

Esercizio 3. *Si consideri la seguente matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 6 & -5 & 3 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

1. *(1 punto) Calcolare la traccia di A.*
2. *(2 punti) Calcolare il determinante di A.*
3. *(1 punto) Stabilire se il vettore $v = (1,1,0)^t$ è un autovettore per A.*
4. *(1 punto) Calcolare il polinomio caratteristico di A.*
5. *(2 punti) Stabilire se A è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$ e nel caso lo sia, trovare una matrice invertibile B ed una matrice diagonale D tali che $B^{-1}AB = D$.*

Sol.: 1) $\mathrm{Tr} A = 2$; 2) $\det A = \det\begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 1 & -5 & 3 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} = 0$

3) $Av = A^1 + A^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = v \Rightarrow v$ è un autovettore di autovalore 1.

4) $P_A(x) = \det(x\mathbb{1}_3 - A) = \det\begin{pmatrix} x-5 & 4 & -2 \\ -6 & x+5 & -3 \\ -2 & 2 & x-2 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} x-1 & 4 & -2 \\ x-1 & x+5 & -3 \\ 0 & 2 & x-2 \end{pmatrix}$

$= \det\begin{pmatrix} x-1 & 4 & -2 \\ 0 & x+1 & -1 \\ 0 & 2 & x-2 \end{pmatrix} = (x-1)\det\begin{pmatrix} x+1 & -1 \\ 2 & x-2 \end{pmatrix} = (x-1)\det\begin{pmatrix} x & -1 \\ x & x-2 \end{pmatrix}$

$= (x-1)\det\begin{pmatrix} x & -1 \\ 0 & x-1 \end{pmatrix} = x(x-1)^2$

5) $Sp(A) = \{0,1\} \subset \mathbb{R}$. $ma_A(0) = 1 \Rightarrow mg_A(0) = 1$.

$V_A(1) = \mathrm{Ker}(\mathbb{1} - A) = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} -4 & 4 & -2 \\ -6 & 6 & -3 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -4 & 4 & -2 \\ -6 & 6 & -3 \end{pmatrix} = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$= \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \right\rangle \Rightarrow mg_A(1) = 2 = ma_A(1)$.

A è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$.

$V_A(0) = \mathrm{Ker} A = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix} = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Esercizio 4. *Si consideri lo spazio vettoriale* $V = \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ *dei polinomi di grado minore o uguale di 2 a coefficienti reali. Denotiamo con* $\mathcal{C} = (1, x, x^2)$ *la base standard di* V*. Sia* $T : V \to V$ *l'applicazione lineare*

$$T(p(x)) = p(x+2) - p(x-2).$$

1. *(2 punti) Calcolare* $T(x+2)$*.*
2. *(3 punti) Scrivere la matrice* A *che rappresenta* T *nella base* $\mathcal{C}$ *(sia in partenza che in arrivo).*
3. *(1 punto) Trovare una base per* $\mathrm{Ker}(T)$*.*
4. *(1 punto) Trovare una base per* $\mathrm{Im}(T)$*.*

Sol.: 1) $T(x+2) = (x+2)+2 - [(x+2)-2] = 4$

2) $T(1) = 0$, $T(x) = x+2-(x-2) = 4$;

$T(x^2) = (x+2)^2 - (x-2)^2 = x^2+4x+4-(x^2-4x+4) = 8x$.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3) $\mathrm{Ker}\, A = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \Rightarrow \mathrm{Ker}\, T = \langle 1 \rangle$

4) $\mathrm{Im}\, S_A = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \Rightarrow \mathrm{Im}\, T = \langle 1, x \rangle$

Esercizio 5. *Si consideri il seguente sistema lineare nelle cinque variabili reali $x_1, \cdots, x_5$ al variare del parametro reale k:*

$$\begin{cases} x_1 + 3x_3 - kx_4 + 2kx_5 = k+1 \\ 2x_1 - x_2 + (6-2k)x_3 - (2k+3)x_4 - 3kx_5 = k \\ 3x_1 - x_2 + (9-2k)x_3 - (3k+3)x_4 - 2kx_5 = k \end{cases}$$

1. *(1 punto) Scrivere la matrice completa $(A|b)$ del sistema.*
2. *(2 punti) Trovare la forma a scala ridotta di $(A|b)$ al variare di $k \in \mathbb{R}$.*
3. *(1 punto) Trovare tutti i valori di k per i quali il sistema è risolubile.*
4. *(1 punto) Per i valori di k per i quali il sistema è risolubile calcolarne una soluzione particolare.*
5. *(1 punto) Per i valori di k per i quali il sistema è risolubile calcolare le soluzioni-base del sistema omogeneo associato.*
6. *(1 punto) Per i valori di k per i quali il sistema è risolubile scrivere le equazioni parametriche dello spazio delle soluzioni.*

Sol.:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 3 & -K & 2K & K+1 \\ 2 & -1 & 6-2K & -2K-3 & -3K & K \\ 3 & -1 & 9-2K & -3K-3 & -2K & K \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 3 & -K & 2K & K+1 \\ 0 & -1 & -2K & -3 & -7K & -K-2 \\ 0 & -1 & -2K & -3 & -8K & -2K-3 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 3 & -K & 2K & K+1 \\ 0 & 1 & 2K & 3 & 7K & K+2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & K & K+1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 3 & -K & 0 & -K-1 \\ 0 & 1 & 2K & 3 & 0 & -6K-5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & K & K+1 \end{array}\right)$$

Se $K=0$ il sistema non é risolubile e la sua forma a a scala ridotta é $\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$

Se $K \neq 0$ il sistema é risolubile. In questo caso la rref é

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 3 & -K & 0 & -K-1 \\ 0 & 1 & 2K & 3 & 0 & -6K-5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{K+1}{K} \end{array}\right)$$

$$\text{Soluzioni} = \begin{pmatrix} -K-1 \\ -6K-5 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{K+1}{K} \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} -3 \\ -2K \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle.$$