Nome, Cognome e Matricola

Esame scritto di Geometria
Secondo appello straordinario 2022/2023
Docente: Giovanni Cerulli Irelli

20 ottobre 2023

Esercizio 1. *In* $(\mathbb{R}^2, \cdot)$ *consideriamo i punti* $A = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ *e* $B = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

1. *(2 punti) Calcolare equazioni parametriche e cartesiane della retta* r *passante per* A *e* B.
2. *(1 punto) Calcolare la pendenza* m *della retta* r.
3. *(1 punto) Calcolare il punto* P *ottenuto riflettendo ortogonalmente l'origine attraverso la retta* r.
4. *(2 punti) Trovare un punto* C *ed un punto* D *tali che il quadrilatero* $\mathcal{Q}$ *di vertici* A, B, C *e* D *sia un quadrato avente il segmento* $\overline{AB}$ *come diagonale.*
5. *(1 punto) Trovare equazioni parametriche e cartesiane della circonferenza* $\mathcal{C}$ *inscritta nel quadrato* $\mathcal{Q}$.

Fare un disegno che illustri la situazione.

Esercizio 2. *In* $\mathbb{R}^3$ *si considerino:*

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad Q = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1. *(1 punto) Calcolare equazioni cartesiane della retta* r *passante per il punto* P *e parallela a* v_1.
2. *(1 punto) Scrivere le equazioni del fascio di piani per la retta* r.
3. *(1 punto) Calcolare l'equazione cartesiana del piano* π *contenente* r *e passante per il punto* Q.
4. *(1 punto) Calcolare* $v_1 \wedge v_2$.
5. *(1 punto) Calcolare equazioni cartesiane del piano* σ *passante per* P *ed avente vettori direttori* v_1 *e* v_2.
6. *(1 punto) Calcolare equazioni parametriche della retta* s *passante per* Q *e ortogonale al piano* σ.
7. *(1 punto) Calcolare l'area del triangolo di vertici* P, $P + v_1$, $P + v_2$.

Esercizio 3. *Si consideri la seguente matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 6 & -5 & 3 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

1. *(1 punto) Calcolare la traccia di A.*
2. *(2 punti) Calcolare il determinante di A.*
3. *(1 punto) Stabilire se il vettore $v = (1, 1, 0)^t$ è un autovettore per A.*
4. *(1 punto) Calcolare il polinomio caratteristico di A.*
5. *(2 punti) Stabilire se A è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$ e nel caso lo sia, trovare una matrice invertibile B ed una matrice diagonale D tali che $B^{-1}AB = D$.*

Esercizio 4. *Si consideri lo spazio vettoriale* $V = \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ *dei polinomi di grado minore o uguale di* 2 *a coefficienti reali. Denotiamo con* $\mathcal{C} = (1, x, x^2)$ *la base standard di* V. *Sia* $T : V \to V$ *l'applicazione lineare*

$$T(p(x)) = p(x+2) - p(x-2).$$

1. *(2 punti) Calcolare* $T(x+2)$.
2. *(3 punti) Scrivere la matrice* A *che rappresenta* T *nella base* $\mathcal{C}$ *(sia in partenza che in arrivo).*
3. *(1 punto) Trovare una base per* $\mathrm{Ker}(T)$.
4. *(1 punto) Trovare una base per* $\mathrm{Im}(T)$.

Esercizio 5. *Si consideri il seguente sistema lineare nelle cinque variabili reali $x_1, \cdots, x_5$ al variare del parametro reale k:*

$$\begin{cases} x_1 + 3x_3 - kx_4 + 2kx_5 & = & k+1 \\ 2x_1 - x_2 + (6-2k)x_3 - (2k+3)x_4 - 3kx_5 & = & k \\ 3x_1 - x_2 + (9-2k)x_3 - (3k+3)x_4 - 2kx_5 & = & k \end{cases}$$

1. *(1 punto) Scrivere la matrice completa $(A|b)$ del sistema.*
2. *(2 punti) Trovare la forma a scala ridotta di $(A|b)$ al variare di $k \in \mathbb{R}$.*
3. *(1 punto) Trovare tutti i valori di k per i quali il sistema è risolubile.*
4. *(1 punto) Per i valori di k per i quali il sistema è risolubile calcolarne una soluzione particolare.*
5. *(1 punto) Per i valori di k per i quali il sistema è risolubile calcolare le soluzioni-base del sistema omogeneo associato.*
6. *(1 punto) Per i valori di k per i quali il sistema è risolubile scrivere le equazioni parametriche dello spazio delle soluzioni.*