

Nome, Cognome e Matricola

Esercizi Settimanali di Geometria 1

Settimana 1

Da consegnare lunedì 03 Ottobre 2022

Esercizio 1. *Calcolare la parte reale e la parte immaginaria di ognuno dei seguenti numeri complessi:*

1. $z_1 = (2 + i)(1 - 2i)(2 - 2i).$

2. $z_2 = (2 + \sqrt{2}i)(-1 + \sqrt{3}i)^{-1}(2 - 2i).$

3. $z_3 = (1 - \sqrt{3}i)(2 - 2\sqrt{3}i)(1 + 2i)^{-1}.$

Esercizio 2. *Rappresentare i seguenti numeri complessi nel piano complesso:*

1. $z_1 = \frac{(1+i)}{\sqrt{2}}$.

2. $z_2 = \frac{(1-i)}{\sqrt{2}}$.

3. $z_3 = \left(\frac{(1+i)}{\sqrt{2}}\right)^2$.

4. $z_4 = (1+i)^{2020}$.

Esercizio 3. Usando solo gli otto assiomi di spazio vettoriale, dimostrare che in uno spazio vettoriale V :

1. se $v + u = w + u$ allora $v = w$, per ogni $u, v, w \in V$
(Legge di cancellazione per la somma).
2. Il vettore nullo è unico.
3. Per ogni vettore $v \in V$ esiste un unico opposto di v .
4. Dimostrare che $tv = 0_V$ se e solo se $t = 0$ oppure $v = 0_V$.

Esercizio 4. *Trovare una matrice complessa X (della taglia appropriata) tale che*

$$-2X - 3A + 2B = A - (B + X)$$

sapendo che

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 1/2 & -2 & 0 \\ \sqrt{2} & 2i & 6 & 4 \end{pmatrix} \quad e \quad B = \begin{pmatrix} -\sqrt{5}i & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3+i & 1-2i & 0 \\ \pi & 100 & 0 & -40 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 5. Siano $u, v, w \in \mathbb{C}^3$. Dire, motivando la risposta, se nei seguenti casi w è combinazione lineare di u e v e se tale combinazione lineare è unica:

1. $u = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 0 \\ i \\ -1 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix};$

2. $u = \begin{pmatrix} i \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} 1+i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix};$

3. $u = 2v = (2 + 3i)w.$