Nome, Cognome e Matricola

Esercizi Settimanali di Geometria 1
Settimana 2
Docente: Giovanni Cerulli Irelli

Da consegnare Lunedì 10 Ottobre 2022

Esercizio 1. *In ognuno dei seguenti spazi vettoriali V e vettori $u, v, w \in V$, stabilire se $w \in Span(u, v)$, motivando la risposta.*

1. $V = \mathbb{R}^2$.
$$u = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

2. $V = \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{Q})$.
$$u = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1/2 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 0 & -2/3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \quad , w = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. $V = \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$.
$$u = 1 + x, \quad v = 1 - x, \quad w = 1 - x^2.$$

4. $V = \mathbb{R}[x]_{\leq 1}$.
$$u = 3 + 2x, \quad v = 1 - 2x, \quad w = 7 + 2x.$$

5. $V = \mathbb{R}[x]$. *Siano* $u, v \in V$ *e* $w = uv$. *Descrivere* u *e* v *tali che* $w \in span(u, v)$

6. V *qualunque,* $u \in V$ *qualunque,* $v = -u$, $w \notin span(u)$.

Esercizio 2. *Di ognuno dei seguenti sottoinsiemi di* $\mathbb{R}^3$*, stabilire, motivando la risposta, se sono o meno un sottospazio vettoriale: (*$X := \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$*)*

1. $\{X \in \mathbb{R}^3 |\, x_1 + x_2 - x_3 = 1\}$
2. $\{X \in \mathbb{R}^3 |\, x_1^2 + x_2^2 = 0\}$
3. $\{X \in \mathbb{R}^3 |\, x_1^2 + x_2 - x_3 = 0\}$
4. $\{X \in \mathbb{R}^3 |\, x_1 + x_2 - x_3 = 0,\, x_1 \geq 0\}$
5. $\{X \in \mathbb{R}^3 |\, x_1 \geq 0,\, x_2 + x_3 = 0\}$
6. $\{X \in \mathbb{R}^3 |\, x_1 x_2 x_3 = 0\}$
7. $\{X \in \mathbb{R}^3 |\, x_1 + x_2 - x_3 = 0,\, x_2 + x_3 = 0\}$
8. $\{X \in \mathbb{R}^3 |\, x_1 + x_2 - x_3 = 0,\, x_2 + x_3 = 1\}$

Per brevità utilizziamo la seguente notazione: scriviamo

$$U : \text{sistema lineare}$$

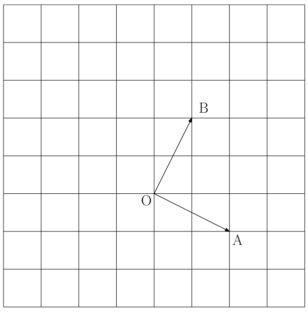
per intendere "U è l'insieme delle soluzioni del sistema lineare".

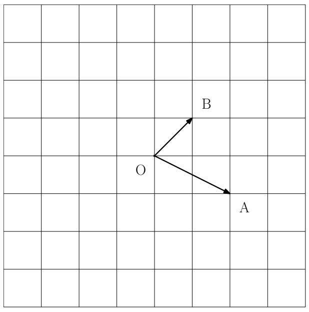
Esercizio 3. *Descrivere i seguenti insiemi in forma parametrica, ovvero come span, e dedurre che sono sottospazi vettoriali:*

1. *In* $\mathbb{R}^5$
$$U_1 : \begin{cases} 2x_2 + 2x_3 - 4x_4 - 2x_5 = 0 \\ -x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_5 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 - 4x_3 + 5x_4 - 3x_5 = 0 \end{cases}$$

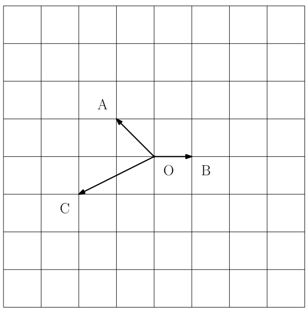
2. *In* $\mathbb{Q}^4$*, al variare di* $\lambda \in \mathbb{Q}$*:*
$$U_2 : \begin{cases} (\lambda - 1)x_1 + 2x_2 + 3x_4 = 0 \\ \lambda x_2 + (\lambda + 1)x_4 = 0 \\ x_1 + \lambda x_3 + x_4 = 0 \\ (\lambda - 1)x_1 + x_4 = 0 \end{cases}$$

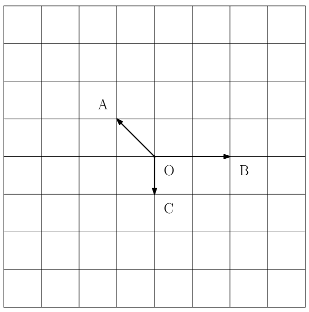
Esercizio 4. *1. Per le seguenti coppie di vettori geometrici $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$ disegnare i vettori geometrici $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$, $(-2)\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$, $2\overrightarrow{OB}$.*

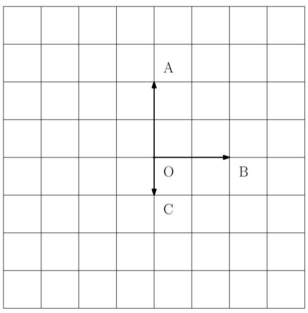


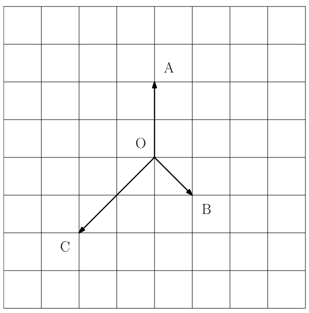


2. In ognuno dei seguenti casi, scrivere $\overrightarrow{OC}$ come combinazione lineare di $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$.









Esercizio 5. *Utilizzando il lemma di scambio dimostrare le seguenti uguaglianze di sottospazi vettoriali.*

1. $\langle e_1, e_3, e_4\rangle = \langle \begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\0\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\1\\-1\end{pmatrix}\rangle.$

2. $\mathbb{R}[x]_{\leq 3} = \langle \pi, 2+\sqrt{2}x, 3-100x+x^2, \sqrt{3}+40x^2+7x^3\rangle.$

3. $\{X = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \mid x_1+x_2+x_3+x_4 = 0\} = \langle \begin{pmatrix}-2\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-3\\1\\1\\1\end{pmatrix}\rangle.$

4. $\{p \in \mathbb{R}[x]_{\leq 3} \mid p(-1) = 0\} = \langle x+1, (x+1)^2, (x+1)^3\rangle$