Nome, Cognome e Matricola

Esercizi Settimanali di Geometria 1
Settimana 3
Docente: Giovanni Cerulli Irelli

Da consegnare lunedì 17 Ottobre 2022

Esercizio 1. *Per oguno dei seguenti spazi vettoriali V e sottoinsiemi $\mathcal{T} \subset V$ stabilire se $\mathcal{T}$ è linearmente indipendente oppure no, giustificando la risposta.*

1. $V = \mathbb{R}^3$, $\mathcal{T} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$

2. $V = \mathbb{R}^3$, $\mathcal{T} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

3. $V = \mathbb{R}^3$, $\mathcal{T} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

4. $V = \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$, $\mathcal{T} = \{2, 1 + x, 1 + 2x, 1 + 2x + x^2\}$.

5. $V = \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$, $\mathcal{T} = \{2, 1 + x, 1 + 2x^2\}$.

6. $V = \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$, $\mathcal{T} = \{2, 1 + x^2, 1 + 2x^2\}$.

Esercizio 2. *In ognuno dei seguenti esempi compaiono uno spazio vettoriale V, un sottospazio vettoriali U di V ed un insieme $\mathcal{B} \subset V$. Dimostrare che $\mathcal{B}$ è linearmente indipendente, che $\mathcal{B} \subset U$ e trovare un sottoinsieme $\mathcal{S} \subset U$ tale che $\mathcal{B} \cup \mathcal{S}$ è una base di U.*

1. $V = \mathbb{R}^3$, $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$, $U : x_1 + x_2 - x_3 = 0$;
2. $V = \mathbb{R}^4$, $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$, $U : x_1 + x_2 - x_4 = 0$;
3. $V = \mathbb{C}$, $\mathcal{B} = (i)$, $U = V$;
4. $V = \mathbb{R}[x]_{\leq 3}$, $\mathcal{B} = (1 + x, -1 + x^2)$, $U = \{p \in V \,|\, p(-1) = 0\}$.

Esercizio 3. *Sia* $V = \mathbb{R}[x]_{\leq 3}$ *lo spazio vettoriale dei polinomi in una variabile* x *di grado al più tre e a coefficienti reali. Si considerino i seguenti insiemi*

$$\mathcal{B}_1 = \{1 - x, 1 + x, x + x^2, 2x - x^2 + 2x^3\}, \quad \mathcal{B}_2 = \{1, x - 1, (x - 1)^2, (x - 1)^3\}.$$

e sia $p(x) = 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3$.

1. *Dimostrare che* $\mathcal{B}_1$ *e* $\mathcal{B}_2$ *sono basi di* V.
2. *Calcolare il vettore delle coordinate* $F_{\mathcal{B}_1}(p)$ *di* p *nella base* $\mathcal{B}_1$.
3. *Calcolare il vettore delle coordinate* $F_{\mathcal{B}_2}(p)$ *di* p *nella base* $\mathcal{B}_2$.

Esercizio 4. *Si considerino i seguenti sottoinsiemi di* $\mathbb{R}^4$*:*

$$U : \begin{cases} 3x_1 + x_2 - 5x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + \frac{2}{3}x_2 - x_3 - 4x_4 = 0 \end{cases} \qquad W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 15 \\ -17 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \pi \\ \sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

1. *Dimostrare che* U *è un sottospazio vettoriale di* $\mathbb{R}^4$.
2. *Trovare una base di* U.
3. *Trovare una base di* $U \cap W$.
4. *Trovare una base di* $U + W$ *seguendo la dimostrazione della formula di Grassmann.*

Esercizio 5. *Siano*

$$U_1 : \begin{cases} x_1 + 2ix_2 = 0 \\ x_2 + 2ix_3 = 0 \end{cases} \quad e \quad U_2 : x_1 = -4x_3$$

due sottoinsiemi di $U_3 := \mathbb{C}^3$.

1. *Mostrare che* U_1 *e* U_2 *sono sottospazi vettoriali di* U_3 *e che* $U_1 \subseteq U_2$.
2. *Scegliere una base* $\mathcal{B}_1$ *di* U_1, *estenderla a una base* $\mathcal{B}_2$ *di* U_2, *quindi estenderla a una base* $\mathcal{B}_3$ *di* U_3.
3. *Scrivere esplicitamente le funzioni delle coordinate* $\mathcal{F}_{\mathcal{B}_1}$, $\mathcal{F}_{\mathcal{B}_2}$, $\mathcal{F}_{\mathcal{B}_3}$.