Nome, Cognome e Matricola

Esercizi Settimanali di Geometria 1
Settimana 4

Da consegnare Lunedi 24 Ottobre 2022

Esercizio 1. *Siano V e W due spazi vettoriali su un campo* $\mathbf{K}$ *e sia $L : V \to W$ un'applicazione lineare tra di essi. Ripercorrere la dimostrazione della formula della dimensione come segue. Supponiamo che V sia finitamente generato e sia $\mathcal{B}_{\mathrm{Ker}(L)} = (v_1, \cdots, v_k)$ una base di* $\mathrm{Ker}(L)$. *Estendiamola ad una base $\mathcal{B}_V = (v_1, \cdots, v_k, v_{k+1}, \cdots, v_n)$ di V.*

1. *Cosa vuol dire che L è lineare? (Dare la definizione.)*
2. *Scrivere la definizione di nucleo ed immagine di L e dimostrare che sono sottospazi vettoriali degli opportuni spazi vettoriali.*
3. *Dimostrare che $(L(v_{k+1}), \cdots, L(v_n))$ è linearmente indipendente.*
4. *Dimostrare che $(L(v_{k+1}), \cdots, L(v_n))$ genera* $\mathrm{Im}(L)$.
5. *Dedurre dai punti precedenti che* $\dim \mathrm{Ker}(L) + \dim \mathrm{Im}(L) = \dim(V)$.

Se $V = U \oplus W$ denotiamo con pr_U^W la proiezione su U lungo W.

Esercizio 2. *1. Nello spazio vettoriale $V = \mathbb{R}^4$ consideriamo i due vettori*

$$X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad e \quad Y = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

ed i seguenti due sottospazi vettoriali

$$U : \begin{cases} 3x_1 + x_2 - 5x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + \frac{2}{3}x_2 - x_3 - 4x_4 = 0 \end{cases} \quad W : \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_4 = 0 \end{cases}$$

Dimostrare che $V = U \oplus W$ e calcolare $pr_U^W(X)$ e $pr_W^U(Y)$.

2. Sia $V = \mathbb{R}[x]_{\leq 3}$ lo spazio vettoriale dei polinomi in una variabile x di grado al più tre e a coefficienti reali. Si considerino i seguenti sottospazi vettoriali di V

$$U = \langle 1 + x^2 + x^3 \rangle, \quad W = \langle 1 - x, 1 + x, (x-1)^2 \rangle.$$

Si considerino i polinomi $p(x) = 1 + x + x^2 + x^3$ e $q(x) = 1 + x^3$. Dimostrare che $V = U \oplus W$ e calcolare $pr_U^W(p(x))$ e $pr_W^U(q(x))$.

Esercizio 3. *Sia $\mathcal{B}_1 = \{v_1, v_2, v_3\}$ una base di uno spazio vettoriale V su un campo $\mathbb{K}$ e sia $\mathcal{B}_2 = \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$ una base di un altro spazio vettoriale W sullo stesso campo $\mathbb{K}$. Sia $L : V \to W$ l'unica funzione lineare tale che*

$$L(v_1) = 2w_1 + 3w_2 - w_3 + w_4, \quad L(v_2) = w_1 + 3w_2 + 2w_4,$$
$$L(v_3) = 3w_1 + 6w_2 - w_3 + 3w_4.$$

1. *Determinare L.*
2. *Trovare una base del nucleo di L.*
3. *Estendere la base del nucleo ad una base del dominio di L.*
4. *Trovare una base dell'immagine di L.*
5. *Estendere la base dell'immagine ad una base del co-dominio di L.*

Esercizio 4. *Sia* $L : \mathbb{K}^4 \to \mathbb{K}^4$ *l'unica applicazione lineare tale che*

$$L(e_1 + e_2) = e_3, \quad L(e_1 - e_2) = e_2, \quad L(e_3 + e_4) = e_1, \quad L(e_3 - e_4) = e_4.$$

1. *Determinare la matrice* A *tale che* $L = S_A$.
2. *Trovare* $L(2e_1 + 2e_3)$.
3. *Trovare* $L^{-1}(e_1 - e_3)$.

Esercizio 5. *Trovare una base dell'immagine ed una base del nucleo di ognuna delle seguenti funzioni lineari*

1. S_A, *dove* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
2. S_B, *dove* $B = \begin{pmatrix} 1 & 2-i & i \\ 2 & 4-2i & 2i \end{pmatrix}$.
3. $F : \mathbb{R}[x]_{\leq 2} \to \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ *data da* $F = \mathrm{Val}_{1+x} + \mathrm{Val}_{1-x}$