Nome, Cognome e Matricola

Esercizi Settimanali di Geometria 1
Settimana 5

Da consegnare Martedi 01 Novembre 2022

Esercizio 1. *Di ognuna delle seguenti matrici calcolare la loro forma a scala ridotta e scrivere la matrice utilizzata per trovare la loro forma a scala ridotta come prodotto di matrici elementari. Calcolare inoltre una base del loro nucleo, una base della loro immagine ed il loro rango.*

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 & 20 \\ 0 & 2 & -2 & 3 & -40 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Esercizio 2. *Utilizzando la riduzione di Gauss, stabilire per quali scalari k le seguenti matrici sono invertibili:*

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ k & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -2i & 1 \\ k & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 6 \\ k & k & k^2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \\ k & k^2 & 1+2k^2 & k^3-k^2 \end{pmatrix}$$

Esercizio 3. *In ognuno dei seguenti casi, calcolare DA e AD'. Trovare la regola generale per determinare cosa succede ad una matrice A quando la si moltiplica a* sinistra *con una matrice diagonale D e quando la si moltiplica a* destra *con una matrice diagonale D' (ricordiamo che una matrice D si dice* diagonale *se è quadrata e $d_{ij} = 0$ per ogni $i \neq j$).*

1. $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}, \quad D' = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$

2. $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}, \quad D' = 6\mathbf{1}_3.$

3. $D = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad D' = D.$

Esercizio 4. *In ciascuno dei seguenti casi dimostrare che l'affermazione è vera oppure scrivere un controesempio che permetta di stabilire che l'affermazione è falsa. In tutto l'esercizio A e B denotano due matrici. Data una matrice A quadrata denotiamo $A^2 := AA$.*

1. *Se AB è definita anche BA è definita.*
2. *Se $AB = BA$ allora A e B sono entrambe quadrate e hanno la stessa taglia.*
3. *Se A e B sono quadrate della stessa taglia allora $AB = BA$.*
4. *Se A ha una riga nulla allora anche AB ha una riga nulla.*
5. *Se A ha una colonna nulla allora anche AB ha una colonna nulla.*
6. *Se $AB = 0$ allora $A = 0$ oppure $B = 0$.*
7. *L'uguaglianza $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ è sempre valida se A e B sono quadrate della stessa taglia.*

Esercizio 5. *Denotiamo con* $\mathbf{1}_2$ *la matrice identità* $2x2$ *ovvero la matrice* $2x2$ *data da* $\mathbf{1}_2 = (e_1|e_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. *Data una matrice* A *quadrata denotiamo* $A^2 := AA$.

1. *Trovare* $A \in Mat_{2\times 2}(\mathbb{R})$ *tale che* $A^2 = -\mathbf{1}_2$.

2. *Si considerino le matrici* $e_1 \otimes e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, *ed* $e_1 \otimes e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. *Data una matrice* $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ *calcolare* $A(e_1 \otimes e_1)$, $(e_1 \otimes e_1)A$, $A(e_1 \otimes e_2)$, $(e_1 \otimes e_2)A$. *Verificare il risultato con MATLAB.*

3. *Sia* A *una matrice di taglia* 2×2 *tale che* $AB = BA$ *per ogni* B. *Dimostrare che allora* A *è una* matrice scalare *ovvero esiste uno scalare* x *tale che* $A = x\mathbf{1}_2$.

4. *Sia* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$. *Dimostrare la seguente uguaglianza di matrici:*

$$A^2 - 4A + 5\mathbf{1}_2 = \mathbf{0}_{2\times 2}.$$

Esercizio 6. *1. Descrivere tutte le possibili matrici 2×2 a scala ridotte.*

2. Data una matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in Mat_{2\times 2}(\mathbb{R})$ nei parametri reali a, b, c, d, trovare la sua forma a scala ridotta. (Ovviamente rref(A) dipende dalla scelta dei parametri, per cui bisogna considerare i diversi casi separatamente.)

Esercizio 7. *Trovare la forma a scala ridotta di ognuna delle seguenti matrici e trovare le loro colonne dominanti. Verificare il risultato con MATLAB.*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 0 & 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} -3 & 3 & -6 & -2 & -4 & 5 & 3 & 8 \\ -2 & 2 & -4 & -3 & -1 & 0 & -2 & -2 \\ -3 & 3 & -6 & 1 & -7 & 11 & 0 & 11 \\ -2 & 2 & -4 & 3 & -7 & 12 & -1 & 11 \end{pmatrix}$$