Nome, Cognome e Matricola

Esercizi Settimanali di Geometria 1
Settimana 6

Da consegnare Martedì 8 Novembre 2022

Esercizio 1. *Calcolare l'inversa delle seguenti matrici, e verificare il risultato con MATLAB:*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1+i & i \\ 1 & -i & -i \\ -i & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & 2 \\ -2 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 2. *In ognuno dei seguenti casi usare l'algoritmo di Gauss per dimostrare che $\mathcal{B}$ è una base di V e trovare la matrice B tale che $F_{\mathcal{B}} = S_B$.*

1. $V = \mathbb{R}^2$, $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$

2. $V = \mathbb{R}^2$, $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$

3. $V = \mathbb{R}^3$, $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right)$

4. $V = \mathbb{R}^4$, $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$

Esercizio 3. *In ognuno dei seguenti casi, usare la funzione coordinate nella base standard $\mathcal{C}$ dello spazio di polinomi V per trovare una base del sottospazio vettoriale Span($\mathcal{T}$).*

1. $V = \mathbb{R}[x]_{\leq 1}$, $\mathcal{T} = \{1, 2, 2x, 2 + x\}$.
2. $V = \mathbb{R}[x]_{\leq 1}$, $\mathcal{T} = \{1 + 2x, 1 + 3x, 2 - 2x, 2 + x\}$.
3. $V = \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$, $\mathcal{T} = \{1 + 2x + 3x^2, 2 + 4x + 6x^2, (x + 1)^2\}$.
4. $V = \mathbb{R}[x]_{\leq 3}$, $\mathcal{T} = \{1 + x, (1 + x)^2, x + x^2, (1 + x)^3, -x + x^3\}$.

Esercizio 4. *Chiaramente, due matrici della stessa taglia A e B sono equivalenti per righe se e solo se $rref(A) = rref(B)$. In ognuno dei seguenti casi stabilire se A e B sono equivalenti per righe e nel caso lo siano trovare una matrice C tale che $CA = B$.*

1. $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ -3 & 0 & -3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$.

2. $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 & -2 & 3 \\ 4 & 1 & 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1/2 & 3 & 9/2 & -5 \\ 1 & 1/4 & 2 & 11/4 & -13/4 \end{pmatrix}$.

3. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & -3 & -1 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & 2/3 & 2 \end{pmatrix}$.

4. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 4 & -2 & -3 \\ 8 & -4 & -6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 4 & 4 \\ -1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

Esercizio 5. *Sia* $V = \mathbb{R}^{[0,2\pi]}$ *lo spazio vettoriale delle funzioni* $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$. *Sia* W *il seguente sottospazio vettoriale di* V*:*

$$W = \langle 1, \sin(x), \cos(x), \cos^2(x), \sin^2(x), \cos(x)\sin(x), \cos(2x), \sin(2x) \rangle.$$

Vogliamo calcolare la dimensione di W *ed esibire una base estratta dai suoi generatori. Per farlo useremo una matrice associata ad un'opportuna funzione lineare. Prima di tutto risolvere questo:*

1. *Sfruttando le regole della goniometria trovare* 3 *generatori di* W *che sono combinazioni lineari degli altri cinque.*

Da qui deduciamo che $\dim W \leq 5$. *Adesso dimostriamo che* $\dim W = 5$. *Per farlo consideriamo le seguenti funzioni: la funzione* $F : W \to \mathbb{R}^5$ *definita come*

$$F(f(x)) = \begin{pmatrix} f(0) \\ f(\pi/6) \\ f(\pi/4) \\ f(\pi/3) \\ f(\pi/2) \end{pmatrix}$$

Definiamo anche la funzione $G : \mathbb{R}^8 \to W$ *come l'unica funzione lineare tale che* $G(e_i)$ *è l'i-esimo generatore di* W*, ovvero*

$$\begin{array}{llll} G(e_1) = 1, & G(e_2) = \sin(x), & G(e_3) = \cos(x), & G(e_4) = \cos^2(x), \\ G(e_5) = \sin^2(x), & G(e_6) = \cos(x)\sin(x), & G(e_7) = \cos(2x), & G(e_8) = \sin(2x). \end{array}$$

Adesso possiamo concludere risolvendo i seguenti problemi:

2. *Mostrare che* F *è una funzione lineare. Dedurre che la funzione composta* $F \circ G : \mathbb{R}^8 \to \mathbb{R}^5$ *è lineare.*

3. *Trovare la matrice* A *tale che* $F \circ G = S_A$.

4. *Calcolare il rango ed una base di* $Col(A)$.

5. *Calcolare una base di* W *estratta dai suoi generatori.*