Nome, Cognome e Matricola

Esercizi Settimanali di Geometria 1
Settimana 7

Da consegnare Martedì 15 Novembre 2022

Esercizio 1. *Sia* V *uno spazio vettoriale di dimensione* 3 *e sia* $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ *una base di* V. *Sia* $f : V \to V$ *l'unica applicazione lineare tale che*

$$f(v_1) = v_1 - 2v_2 + v_3, \quad f(v_2) = v_1 + v_3, \quad f(v_3) = v_1 + v_2 + v_3.$$

1. *Scrivere la matrice che rappresenta* f *nella base* $\mathcal{B}$. *Denotarla con* A.

2. *Trovare una base per il nucleo di* f.

3. *Trovare una base per l'immagine di* f.

4. *Sia* $\mathcal{C} = \{w_1, w_2, w_3\}$ *dove*

$$w_1 = v_1 + 2v_2, \quad w_2 = -v_1 - v_2, \quad w_3 = v_1 + v_2 + v_3.$$

   Dimostrare che $\mathcal{C}$ *è una base di* V.

5. *Scrivere la matrice che rappresenta* f *nella base* $\mathcal{C}$.

Esercizio 2. *Sia $V = \mathbb{R}[x]_{\leq 3}$. Consideriamo le seguenti funzioni*

$$F : V \to \mathbb{R}^4 : \ F(p(x)) = \begin{pmatrix} p(-2) \\ p(-1) \\ p(1) \\ p(2) \end{pmatrix}$$

$$L : V \to V : \ L(p(x)) = p(x+1) + p(x-1)$$

1. *Dimostrare che F ed L sono lineari.*
2. *Trovare una base $\mathcal{B}$ di V tale che $F = F_{\mathcal{B}}$.*
3. *Trovare la matrice associata ad L nella base $\mathcal{B}$ (sia in partenza che in arrivo).*
4. *Trovare la matrice associata ad L nella base standard (sia in partenza che in arrivo).*
5. *Mostrare che L è invertibile e calcolare l' inversa della matrice del punto precedente.*

Esercizio 3. *In* $\mathbb{R}^3$ *si considerino i sottospazi vettoriali*

$$U : 2x_1 + x_2 - x_3 = 0 \quad W : \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

1. *Dimostrare che* $\mathbb{R}^3 = U \oplus W$.
2. *Calcolare la matrice* P *di proiezione su* U *lungo* W.
3. *Calcolare* $pr_U^W\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

Esercizio 4. *1. Siano $AX = b$ ed $RX = d$ due sistemi lineari di m equazioni in n incognite. Dimostrare che se le matrici complete $(A|b)$ e $(R|d)$ sono equivalenti per righe allora i due sistemi sono equivalenti, nel senso che hanno le stesse soluzioni.*

2. Trovare tutte le soluzioni del seguente sistema a scala ridotta (ovvero per il quale la matrice completa è a scala ridotta) nelle variabili $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 7x_4 + 5x_6 = 1 \\ x_3 + 3x_4 + 2x_6 = 3 \\ x_5 + 2x_6 = 4 \end{cases}$$

Esercizio 5. *1. Studiare il seguente sistema lineare*

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 7x_3 + 7x_4 + 6x_5 & = & 1 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 3x_4 + 5x_5 & = & 1 \\ 6x_1 + x_2 + 7x_3 - 2x_4 + 3x_5 & = & 1 \end{cases}$$

2. Risolvere il seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 & = & 1 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 & = & 2 \\ 4x_1 + x_2 + x_3 & = & -2 \end{cases}$$

3. Studiare il seguente sistema lineare al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + k(k-1)x_4 + (k+3)x_5 & = & 5-k \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 + k(k-1)x_4 + (k+3)x_5 & = & 6 \\ 4x_1 + 8x_2 + x_3 + k(k-1)x_4 + (k+5)x_5 & = & 10 \end{cases}$$