Nome, Cognome e Matricola

Esercizi Settimanali di Geometria 1
Settimana 8

Da consegnare Martedì 22 novembre 2022

Esercizio 1. *1. Studiare il seguente sistema lineare nelle variabili* x_1, x_2, x_3, x_4*:*

$$\begin{cases} 13x_1 + x_2 - x_3 - x_4 & = & 1 \\ 65x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 & = & -1 \\ 52x_1 + 4x_2 + 4x_3 + x_4 & = & 2 \end{cases}$$

2. Studiare il seguente sistema lineare nelle variabili x_1, x_2, x_3, x_4 *al variare del parametro* $k \in \mathbb{R}$*:*

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + kx_4 & = & -2k - 1 \\ 3x_1 + 6x_2 - 3x_3 + 5kx_4 & = & 2k - 1 \\ 3x_1 + 6x_2 - 2x_3 + 3kx_4 & = & -2k - 3 \end{cases}$$

Esercizio 2. *Calcolare il determinante delle seguenti matrici e verificare il risultato con MATLAB:*

1. $$A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 3 \\ 7 & -5 & 2 \\ -5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

2. $$B = \begin{pmatrix} 2-i & 1+i & 1-i \\ 2i & -i & 2+2i \\ -2+i & 1+i & 3i \end{pmatrix}$$

3. $$C = \begin{pmatrix} -2 & -4 & -2 & 4 \\ -3 & 4 & 1 & 2 \\ -3 & 3 & -4 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

4. $$D = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 5 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 4 & 4 & 1 \\ 4 & 3 & 5 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Esercizio 3. 1. *Sia A una matrice $n \times n$ e sia $d = det(A)$. Conoscendo d, calcolare $det(-A)$.*

2. *Sia A una matrice $n \times n$, sia $d = det(A)$ e sis λ uno scalare. Conoscendo d, calcolare $det(\lambda A)$.*

3. *Sia $X \in \mathbb{K}^n$ un matrice colonna e $Y \in Mat_{1\times n}(\mathbb{K})$ una matrice riga. Calcolare $det(XY)$.*

4. *Calcolare*

$$det \begin{pmatrix} 0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1 & 1 & 0 & 0 \\ x_2 & 0 & 1 & 0 \\ x_3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

al variare dei parametri x_1, x_2, x_3.

Esercizio 4. *1. Dimostrare che il determinante della seguente matrice è zero, per qualunque valore dei parametri:*

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & 0 & c & d \\ 0 & 0 & 0 & e & f \\ g & h & i & \ell & m \\ n & o & p & q & r \end{pmatrix}$$

2. Calcolare il determinante delle seguenti matrici:

$$\begin{pmatrix} 13247 & 28469 \\ 13347 & 28569 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 246 & 1014 & -342 \\ 427 & 543 & 721 \\ 327 & 443 & 621 \end{pmatrix}.$$

3. Sapendo che 195, 247 *e* 403 *sono divisibili per* 13, *dimostrare che anche il determinante della matrice* $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 9 & 4 & 0 \\ 5 & 7 & 3 \end{pmatrix}$ *è divisibile per* 13.

Esercizio 5.

1. *Usare il determinante per trovare tutti i valori di* $t \in \mathbb{R}$ *per i quali i tre vettori*
$$\begin{pmatrix} t \\ 1+t \\ 2+t \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} t \\ 2t \\ 3t \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3t \end{pmatrix}$$
formano una base di $\mathbb{R}^3$.

2. *Sia* $V = \mathbb{K}[x]_{\leq 2}$ *e siano* $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{K}$. *Usando il determinante mostrare che i polinomi* $(x+\lambda_1)^2$, $(x+\lambda_2)^2$ *e* $(x+\lambda_3)^2$ *sono linearmente indipendenti se e solo se* $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3 \neq \lambda_1$.
[Suggerimento: usare la base $(x^2, x, 1)$*]*

Esercizio 6. *Nello spazio vettoriale vettoriale* $\mathcal{V}_O^2$ *sia* $\mathcal{B}$ *una base unitaria e siano* P_1*,* P_2*,* P_3 *e* P_4 *quattro punti del piano tali che*

$$F_{\mathcal{B}}(\vec{OP_1}) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad F_{\mathcal{B}}(\vec{OP_2}) = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad F_{\mathcal{B}}(\vec{OP_3}) = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad F_{\mathcal{B}}(\vec{OP_4}) = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Calcolare l'area del quadrilatero di vertici P_1*,* P_2*,* P_3 *e* P_4*.*