Nome, Cognome e Matricola

Esercizi Settimanali di Geometria
Settimana 9

Da consegnare Martedì 29 novembre 2022

Esercizio 1. *1. Calcolare il determinante della seguente matrice:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 5 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 4 & 4 & 1 \\ 4 & 3 & 5 & 4 & 2 \end{pmatrix};$$

2. Si consideri la seguente matrice complessa:

$$B = \begin{pmatrix} 2-i & 1+i & 1-i \\ 2i & -i & 2+2i \\ -2+i & 1+i & 3i \end{pmatrix}.$$

(a) Calcolare il determinante di B sviluppando lungo la seconda colonna;

(b) Calcolare il determinante di B sviluppando lungo la terza riga.

Esercizio 2. *1. Calcolare il determinante della seguente matrice*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 & 3 & 3 \\ 2 & 5 & 4 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 3 & 5 & 5 & 5 \\ 3 & 3 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 3 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Calcolare il determinante della seguente matrice triangolare a blocchi:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \sqrt{2} & -32 & 98 & 12 & 47 \\ 2 & 5 & \pi & 45 & 70 & -3 & -81 \\ 0 & 0 & 3 & 5 & 5 & 55 & -23 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 89 & -90 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 1 & 77 & 44 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Esercizio 3. *Si considerino i seguenti vettori di* $\mathbb{R}^4$*:*

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

1. *Utilizzando il determinante dimostrare che l'insieme* $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ *è una base di* $\mathbb{R}^4$*.*

2. *Utilizzando la formula di Cramer, calcolare le coordinate del vettore* $w = \begin{pmatrix} 8 \\ -16 \\ 24 \\ -8 \end{pmatrix}$ *nella base* $\mathcal{B}$*.*

Esercizio 4. *Calcolare l'inversa della seguente matrice in due modi diversi: prima usando la formula di Cramer e poi usando l'algoritmo di inversione. Qual è più veloce?*

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -3 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ -2 & -3 & -3 & -3 \\ 2 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Esercizio 5. *Utilizzare la formula di Cramer per trovare l'unica soluzione dei seguenti sistemi lineari:*

1. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 & = & 3 \\ 3x_1 - 2x_2 & = & 4 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 & = & 2 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 & = & 2 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 & = & 1 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 & = & 2 \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 + 3x_4 & = & -2 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 3x_4 & = & 2 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 & = & 0 \end{cases}$

Esercizio 6. *Si consideri la seguente matrice dipendente dal parametro k:*

$$A(k) = \begin{pmatrix} 0 & k & k^2 \\ -k-1 & k-1 & 1-k \\ 1 & (k-1)^2 & k-1 \end{pmatrix}$$

Utilizzare il teorema degli orlati per trovare i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali

1. $rg(A(k)) = 1$;
2. $rg(A(k)) = 2$;
3. $rg(A(k)) = 3$.