Nome, Cognome e Matricola

Esercizi Settimanali di Geometria
Settimana 10

Da consegnare Martedì 6 Dicembre 2022

Esercizio 1.

1. *Sia V uno spazio vettoriale finitamente generato e sia $L : V \to V$ un endomorfismo lineare. Trovare due basi $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$ di V tali che la matrice che rappresenta L nelle basi $\mathcal{B}_1$ (in partenza) e $\mathcal{B}_2$ (in arrivo) è diagonale. Possiamo concludere che L è diagonalizzabile?*

2. *Sia V uno spazio vettoriale finitamente generato e sia $L : V \to V$ un endomorfismo lineare. Dimostrare che L è diagonalizzabile se e solo se per ogni base $\mathcal{B}$ di V la matrice che rappresenta L nella base $\mathcal{B}$ (sia in partenza che in arrivo) è diagonalizzabile.*

3. *Siano A e C due matrici simili. Dimostrare che A e C hanno lo stesso spettro e per ogni autovalore λ $mg_A(\lambda) = mg_C(\lambda)$.*

4. *Sia $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$ una matrice 2×2 simmetrica. Dimostrare che A è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$ per ogni scelta di $a, b, d \in \mathbb{R}$.*

Esercizio 2. *Si consideri la seguente matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & -1 \\ -2 & 3 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 3 & -1 \\ -2 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

1. *Calcolare il polinomio caratteristico di A.*
2. *Calcolare la molteplicità algebrica di ogni autovalore di A.*
3. *Calcolare le molteplicità geometrica di ogni autovalore di A.*
4. *Stabilire se A è diagonalizzabile e nel caso lo sia trovare una matrice invertibile B ed una matrice diagonale D tali che $B^{-1}AB = D$.*

Esercizio 3. *Si consideri la seguente matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -4 & 6 \\ 4 & -2 & 0 & 2 \\ -4 & 6 & 4 & -2 \\ -4 & 6 & 8 & -6 \end{pmatrix}$$

1. *Calcolare il polinomio caratteristico e lo spettro di A.*
2. *Calcolare una base di ogni autospazio di A.*
3. *Stabilire se A è diagonalizzabile e nel caso lo sia trovare una matrice invertibile B ed una matrice diagonale D tali che $B^{-1}AB = D$.*

Esercizio 4. *Si consideri la seguente matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. *Calcolare il determinante e la traccia di A.*
2. *Stabilire se A è invertibile e nel caso lo sia calcolare la sua inversa.*
3. *Calcolare il polinomio caratteristico di A.*
4. *Stabilire se A è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$ e nel caso lo sia trovare una base di autovettori.*

Esercizio 5. *Sia* $V = \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ *e sia* $L : V \to V$ *l'endomorfismo lineare*

$$L(p) = p'(x^2 + 1) - p'(x).$$

Stabilire se L *è diagonalizzabile e nel caso lo sia trovare una base di* V *composta di suoi autovettori.*