Nome, Cognome e Matricola

Esercizi Settimanali di Geometria 1
Settimana 11

Da consegnare Martedì 13 Dicembre 2022

Esercizio 1. *Per ognuna delle seguenti matrici A determinare equazioni cartesiane di $Col(A)$:*

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$;
2. $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$;
3. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$;
4. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ -1 & 2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$;
5. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \\ -2 & 5 & -1 \end{pmatrix}$.

Esercizio 2. • *Trovare la forma parametrica e cartesiana dei seguenti sottospazi affini di* $\mathbb{R}^2$

1. *la retta passante per il punto* $P = (1, 1)^t$ *e parallela alla retta di equazione* $2x + 3y = 5$*;*
2. *i punti* R *della retta* $2x - y = 4$ *tali che il triangolo di vertici* $P = (1, 1)^t$, $Q = (1, 0)^t$ *ed* R *abbia area uguale a* 2*;*
3. *la retta passante per i punti* $P_1 = (2, -3)^t$ *e* $P_2 = (2, 5)^t$*;*
4. *la retta passante per i punti* $P_1 = (2, 3)^t$ *e* $P_2 = (1, 4)^t$*;*

• *Determinare la posizione reciproca delle seguenti rette di* $\mathbb{R}^2$ *(senza cambiare la loro forma):*

1. $r_1 : 2x + 3y = 1$ *e* $r_2 : 2x - 3y = 1$*;*
2. $r_1 : x + y = 2$ *e* $r_2 = (-2, 2)^t + \langle (4, -1)^t \rangle$*;*
3. $r_1 = (1, 2)^t + \langle (1, 2)^t \rangle$ *e* $r_2 = (1, -1)^t + \langle (2, -3)^t \rangle$.

Esercizio 3. *Siano $P_1, P_2, P_3 \in \mathbb{R}^2$ 3 punti non allineati tali che l'area del triangolo $T = P_1P_2P_3$ sia 1.*

1. *Determinare la forma parametrica delle rette contenenti i lati del triangolo $P_1P_2P_3$.*

2. *Calcolare le coordinate dei punti Q_1, Q_2 e Q_3 del triangolo T definiti come segue: Q_1 è sul lato P_2P_3 in modo che il vettore $P_2 - Q_1$ sia il doppio del vettore $Q_1 - P_3$, Q_2 è sul lato P_3P_1 in modo che $P_3 - Q_2$ sia il doppio del vettore $Q_2 - P_1$ e Q_3 è sul lato P_1P_2 in modo che $Q_3 - P_1$ sia il doppio di $P_2 - Q_3$.*

3. *Calcolare l'area del triangolo $Q_1Q_2Q_3$.*

4. *Determinare la forma parametrica delle rette r_1 per P_1 e Q_1, r_2 per P_2 e Q_2 e r_3 per P_3 e Q_3.*

5. *Calcolare le coordinate dei punti $X_1 = r_2 \cap r_3$, $X_2 = r_3 \cap r_1$, $X_3 = r_1 \cap r_2$.*

6. *Calcolare l'area del triangolo $X_1X_2X_3$.*

Esercizio 4. *Studiare la posizione reciproca delle seguenti coppie di sottospazi affini di $\mathbb{R}^3$ (senza cambiare la loro forma):*

- *1.* $\pi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \rangle$, $\pi_2 : 2x + 3y + z = 1$;

  2. $r = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \rangle$, $\pi_2 : 2x + 3y - z = -1$;

  3. $r_1 : \begin{cases} 2x + y - z = 2 \\ x + y + 3z = 3 \end{cases}$; $r_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \rangle$.

- *Trovare la forma parametrica e cartesiana dei seguenti sottospazi affini di $\mathbb{R}^3$*

  1. *il piano passante per i tre punti $P_1 = (1,1,1)^t$, $P_2 = (-2,3,4)^t$ e $P_3 = (2,2,3)^t$;*
  2. *il piano passante per il punto $P = (1,1,1)^t$ e parallelo al piano di equazione $x + y + z = 1$;*
  3. *la retta che giace sia nel piano $x + y + z = 2$ che nel piano $x + 2y + 3z = 2$.*
  4. *il piano che contiene la retta $\begin{cases} x + 2y - 1z = 2 \\ x - 3y + 4z = 1 \end{cases}$ ed il punto $Q = (1,2,3)^t$.*

- *Dimostrare che le due rette*

$$r_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \rangle; \quad r_2 : \begin{cases} 2x + y - z = 2 \\ x + y + 3z = 3 \end{cases}$$

  sono sghembe e trovare equazioni parametriche e cartesiane del piano passante per r_2 e parallelo ad r_1.

Esercizio 5. *Dimostrare la seguente affermazione, vista a lezione nel caso del piano e dello spazio: Siano $U : AX = b$ un sottospazio affine di $\mathbf{R}^n$ in forma cartesiana e sia $W = Y_0 + \langle w_1, \cdots, w_h \rangle$ un sottospazio affine di $\mathbb{R}^n$ di dimensione h scritto in forma parametrica. Dimostrare che*

$$U \cap W \neq \emptyset \Longleftrightarrow rg((Aw_1|\cdots|Aw_h)) = rg((Aw_1|\cdots|Aw_h|b - AY_0))$$

Esercizio 6. *Siano* r *e* π *una retta ed un piano di* $\mathbb{R}^3$*, rispettivamente.*

1. *Supponiamo che* $r = X_0 + \langle v \rangle$ *e* $\pi : ax + by + cz = d$*. Sia* $A_\pi = (a, b, c)$*. Riempire la seguente tabella con le condizioni di posizione reciproca e dare condizioni per trovare l'unico punto di intersezione* P_0 *nel caso vi sia:*

Posizione reciproca	$A_\pi v$	$rg(A_\pi v \mid d - A_\pi X_0)$
$r \subset \pi$		
$r \| \pi$		
$r \cap \pi = \{P_0\}$		

2. *Supponiamo che* $r = X_0 + \langle v \rangle$ *e* $\pi = Y_0 + \langle w_1, w_2 \rangle$*. Riempire la seguente tabella con le condizioni di posizione reciproca e dare condizioni per trovare l'unico punto di intersezione* P_0 *nel caso vi sia:*

Posizione reciproca	$det(v \mid w_1 \mid w_2)$	$rg(v \mid w_1 \mid w_2 \mid X_0 - Y_0)$
$r \subset \pi$		
$r \| \pi$		
$r \cap \pi = \{P_0\}$		

3. *Supponiamo che* $r : \begin{cases} ax + by + cz = d \\ a'x + b'y + c'z = d' \end{cases}$ *e* $\pi = Y_0 + \langle w_1, w_2 \rangle$. *Poniamo* $A_r = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix}$ *e* $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} d \\ d' \end{pmatrix}$. *Riempire la seguente tabella con le condizioni di posizione reciproca e dare condizioni per trovare l'unico punto di intersezione* P_0 *nel caso vi sia:*

Posizione reciproca	$det(A_r(w_1\|w_2))$	$rg(A_r(w_1\|w_2)\|\mathbf{b} - A_rY_0)$
$r \subset \pi$		
$r\|\|\pi$		
$r \cap \pi = \{P_0\}$		

4. *Supponiamo che* $r : \begin{cases} ax + by + cz = d \\ a'x + b'y + c'z = d' \end{cases}$ *e* $\pi : \alpha x + \beta y + \gamma z = d$. *Siano* $A_r = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} d \\ d' \end{pmatrix}$ *e* $A_\pi = (\alpha, \beta, \gamma)$. *Riempire la seguente tabella con le condizioni di posizione reciproca e dare condizioni per trovare l'unico punto di intersezione* P_0 *nel caso vi sia:*

Posizione reciproca	$det\begin{pmatrix} A_r \\ \hline A_\pi \end{pmatrix}$	$rg\left(\begin{array}{c\|c} A_r & \mathbf{b} \\ \hline A_\pi & d \end{array}\right)$
$r \subset \pi$		
$r\|\|\pi$		
$r \cap \pi = \{P_0\}$		