Nome, Cognome e Matricola

# Esercizi Settimanali di Geometria 1
# Settimana 13

Da consegnare venerdì 30 Dicembre 2022

**Esercizio 1.** 1. *Calcolare il volume del parallelepipedo di spigoli* $v_1 = \vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$, $v_2 = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$, $v_3 = 3\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$.

*Stabilire se la base* $(v_1, v_2, v_3)$ *ha la stessa orientazione di* $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

2. *Dimostrare che le due rette*

$$r_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \rangle, \quad r_2 : \begin{cases} 2x + y - z = 2 \\ x + y + 3z = 3 \end{cases}$$

*sono sghembe. Trovare le equazioni parametriche e cartesiane del piano passante per* $r_2$ *e parallelo ad* $r_1$. *Calcolare la distanza tra* $r_1$ *ed* $r_2$.

**Esercizio 2.** *Si considerino le rette affini di* $\mathbb{R}^3$ $r_1 = P_1 + \langle v_1 \rangle$ *e* $r_2 = P_2 + \langle v_2 \rangle$ *dove*

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

*Si consideri inoltre il punto* $P = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

1. *Calcolare il prodotto vettoriale* $n = v_1 \wedge v_2$ *e la sua norma. Fare un disegno per illustrare verso e direzione di* $n$ *rispetto a* $v_1$ *e* $v_2$.
2. *Calcolare l'area del triangolo di vertici* $0, v_1, v_2$.
3. *Stabilire la posizione reciproca di* $r_1$ *ed* $r_2$.
4. *Calcolare la distanza tra* $r_1$ *ed* $r_2$.
5. *Calcolare la matrice di proiezione ortogonale sul piano* $\langle v_1, v_2 \rangle$.
6. *Trovare una matrice* $A$ *con le seguenti proprietà:* $AX = -3X$ *per ogni* $X \in \langle v_1, v_2 \rangle$ *e* $AY = 5Y$ *per ogni* $Y \in \langle v_1, v_2 \rangle^{\perp}$.

**Esercizio 3.** *Consideriamo le due rette di* $\mathbb{R}^3$ $r_1 = P_1 + \langle v_1 \rangle$ *e* $r_2 = P_2 + \langle v_2 \rangle$ *dove*

$$P_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

1. *Dimostrare che* $r_1$ *e* $r_2$ *sono sghembe.*
2. *Calcolare la distanza tra* $r_1$ *ed* $r_2$.
3. *Trovare equazioni parametriche e cartesiane della retta* $r_3$ *tale che* $r_3 \perp r_1$, $r_3 \perp r_2$, $r_3 \cap r_1 \neq \emptyset$ *e* $r_3 \cap r_2 \neq \emptyset$.
   *La retta* $r_3$ *si chiama la retta di minima distanza tra* $r_1$ *ed* $r_2$.

**Esercizio 4.** *Consideriamo i seguenti vettori di* $\mathbb{R}^4$*:*

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad w = 12 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

*Sia* $U = \langle v_1, v_2 \rangle$.

1. *Calcolare la matrice* $P_U$ *di proiezione ortogonale su* $U$.
2. *Calcolare la matrice di proiezione ortogonale su* $U^\perp$. *(suggerimento: usare il teorema di decomposizione ortogonale e la matrice identità).*
3. *Calcolare equazioni cartesiane di* $U$ *usando il teorema di decomposizione ortogonale.*
4. *Calcolare una base ortonormale di* $U$.
5. *Calcolare la proiezione ortogonale di* $w$ *su* $U$ *in due modi diversi: come* $P_U w$ *e con i coefficienti di Fourier.*
6. *Calcolare la distanza di* $w$ *da* $U$.

**Esercizio 5.** *Si consideri la seguente matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

1. *Dimostrare che $A$ è ortogonalmente diagonalizzabile in* $(\mathbb{R}^3, \cdot)$.
2. *Trovare una matrice ortogonale $B$ ed una matrice diagonale $D$ tali che $B^t AB = D$.*

**Esercizio 6.** *Si consideri il polinomio*

$$p(x_1, x_2) = 2x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 + 2x_1 - 2x_2 + 2.$$

1. *Trovare le matrici* $A$ *e* $b$ *tali che* $p(X) = X^tAX + 2b \cdot X + 2$.
2. *Trovare una matrice ortogonale* $B$ *ed una matrice diagonale* $D$ *tali che* $B^tAB = D$.
3. *Calcolare il polinomio* $q(Y) = p(BY)$.
4. *Trovare la forma canonica metrica della conica* $\mathcal{C}_p$.