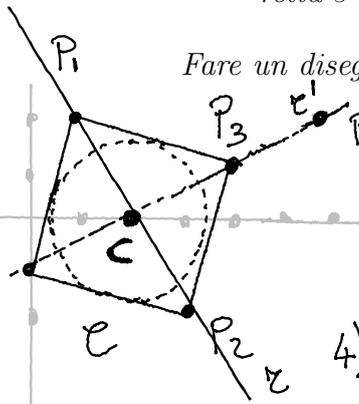


Esercizio 1. In (\mathbb{R}^2, \cdot) siano $P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $P_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ e $P_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

- (1 punto) Scrivere equazioni parametriche e cartesiane della retta r passante per P_1 e P_2 .
- (1 punto) Trovare il punto P_4 ottenuto riflettendo ortogonalmente il punto P_3 attraverso la retta r .
- (1 punto) Trovare il punto P_5 ottenuto ruotando il punto P_2 attorno al punto P_1 in senso anti-orario di un angolo di $\pi/3$.
- (1 punto) Dimostrare che P_5 appartiene alla retta passante per P_3 e P_4 .
- (1 punto) Dimostrare che il poligono Q di vertici P_1, P_2, P_3 e P_4 è un quadrato.
- (1 punto) Calcolare l'equazione cartesiana e parametrica della circonferenza C inscritta nel poligono Q .
- (1 punto) Le due rette $r_1 : (2 - 2\sqrt{3})x + \sqrt{3}y = 1$ e $r_2 : \sqrt{3}x - 2y = -2$ sono incidenti in un punto P . Trovare un'equazione cartesiana della retta s passante per i punti P e P_5 senza calcolare P .



Fare un disegno che illustri la situazione.

$$1) r = P_1 + \langle \vec{P}_1 \vec{P}_2 \rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix} \rangle : 2x + y = 4.$$

$$2) P_4 = P_1 + Q_{-2}(\vec{P}_1 \vec{P}_3) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$3) P_5 = P_1 + R_{\pi/3}(\vec{P}_1 \vec{P}_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+2\sqrt{3} \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

$$4) r' = \text{retta per } P_3 \text{ e } P_4 : x - 2y = 2. \quad (2+2\sqrt{3}) - 2\sqrt{3} = 2 \Rightarrow P_5 \in r'$$

$$5) \vec{P}_4 \vec{P}_2 + \vec{P}_4 \vec{P}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \vec{P}_4 \vec{P}_3 \Rightarrow Q \text{ è un parallelogramma.}$$

$$\|\vec{P}_4 \vec{P}_2\| = \|\vec{P}_4 \vec{P}_1\| = \sqrt{10} \Rightarrow Q \text{ è un rombo (ha i lati uguali).}$$

$$\vec{P}_4 \vec{P}_2 \cdot \vec{P}_4 \vec{P}_1 = 0 \Rightarrow Q \text{ è un quadrato (ha gli angoli uguali a } \frac{\pi}{2} \text{).}$$

$$5) \text{centro } C = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{raggio} = \frac{\|\vec{P}_1 \vec{P}_3\|}{2} = \frac{\sqrt{10}}{2}. \quad C : (x-2)^2 + y^2 = \frac{5}{2}, \quad C = \{C + r(\cos \theta) + r(\sin \theta)\} \mid \theta \in [0, 2\pi]$$

$$6) \text{Fascio di rette per } r_1 \text{ e } r_2 : \alpha((2-2\sqrt{3})x + \sqrt{3}y - 2) + \beta(\sqrt{3}x - 2y + 2) = 0.$$

$$\text{Passaggio per } P_5 : -7\alpha + 8\beta = 0 \Rightarrow (\alpha, \beta) = (8, 7).$$

$$\text{La retta cercata è } s : (16 - 9\sqrt{3})x + (8\sqrt{3} - 14)y = 2.$$

Esercizio 2. In (\mathbb{R}^3, \cdot) siano

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad P_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

1. (1 punto) Stabilire se i punti P_1 , P_2 e Q sono allineati.
2. (1 punto) Calcolare equazioni cartesiane della retta r passante per i punti P_1 e P_2 .
3. (1 punto) Usare il fascio di piani per r per trovare equazioni cartesiane del piano π passante per i punti P_1 , P_2 e P_3 .
4. (1 punto) Calcolare $n = \vec{P_1P_2} \wedge \vec{P_1P_3}$.
5. (1 punto) Calcolare l'area del triangolo T di vertici P_1 , P_2 e P_3 .
6. (2 punti) Calcolare la distanza tra le rette $r_1 = X_1 + \langle v_1 \rangle$ e $r_2 = X_2 + \langle v_2 \rangle$ dove

$$X_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

1) $\vec{P_1P_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{P_1Q} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = -\vec{P_1P_2} \Rightarrow P_1, P_2, Q$ sono allineati.

2) $r = P_1 + \langle P_2 - P_1 \rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle : \begin{cases} x+z=3 \\ y-2z=-3 \end{cases}$

3) fascio di piani per r : $\alpha(x+z-3) + \beta(y-2z+3) = 0$.
passaggio per $P_3 \Rightarrow -\alpha + 4\beta = 0 \Rightarrow \pi: 4x + y + 2z = 9$

4) $n = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Notiamo che $\pi: m \cdot X = m \cdot P_3$

5) Area $(T) = \frac{1}{2} \|n\| = \frac{\sqrt{21}}{2}$

6) $\text{dist}(X_1 + \langle v_1 \rangle, X_2 + \langle v_2 \rangle) = \text{dist}(X_1 - X_2, \langle v_1, v_2 \rangle)$. $v_1 \wedge v_2 = \begin{pmatrix} -5 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix} \neq 0_{\mathbb{R}^3}$
 $\Rightarrow \text{dist}(r_1, r_2) = \frac{|(X_1 - X_2) \cdot v_1 \wedge v_2|}{\|v_1 \wedge v_2\|} = \frac{6}{\sqrt{30}} = \sqrt{\frac{6}{5}}$

Esercizio 3. Si consideri la seguente matrice

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 5 \\ -2 & 1 & 2 & 4 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. (2 punti) Calcolare il polinomio caratteristico e lo spettro di A .
2. (2 punti) Calcolare una base di ogni autospazio di A .
3. (1 punto) Stabilire se A è diagonalizzabile su \mathbb{R} e nel caso lo sia trovare una matrice invertibile B ed una matrice diagonale D tali che $B^{-1}AB = D$.
4. (1 punto) Calcolare A^n per ogni $n \geq 1$.
5. (1 punto) Trovare uno scalare non-nullo λ tale che la matrice $\lambda(A - \mathbf{1}_4)$ sia un proiettore.

1) $P_A(x) = \det(x\mathbf{1}_4 - A) = (x+1)^2(x-1)^2$. $Sp(A) = \{-1, 1\} \subset \mathbb{R}$.

2) $V_1(A) = \text{Ker}(\mathbf{1}_4 - A) = \text{Ker} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow B_{V_1(A)} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

$V_{-1}(A) = \text{Ker}(-\mathbf{1}_4 - A) = \text{Ker} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow B_{V_{-1}(A)} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$.

3) $ma_A(1) = mg_A(1) = 2 = ma_A(-1) = mg_A(-1)$. A è diagonalizzabile su \mathbb{R} .

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$$

4) $B^{-1}AB = D \Rightarrow A = BDB^{-1} \Rightarrow A^n = BD^nB^{-1}$. $D^n = \begin{cases} \mathbf{1}_4 & \text{se } n \text{ è pari,} \\ D & \text{se } n \text{ è dispari.} \end{cases}$

$$\Rightarrow A^n = \begin{cases} \mathbf{1}_4 & \text{se } n \text{ è pari,} \\ A & \text{se } n \text{ è dispari.} \end{cases}$$

5) Una matrice quadrata C è un proiettore (su $\text{Col } C$ lungo $\text{Ker } C$) se e solo se $C^2 = C$.

$$(\lambda(A - \mathbf{1}_4))^2 = \lambda^2(A - \mathbf{1}_4)^2 = \lambda^2(A^2 - 2A + \mathbf{1}_4) = \lambda^2(2\mathbf{1}_4 - 2A) = -2\lambda(\lambda(A - \mathbf{1}_4))$$

$$-2\lambda = 1 \Leftrightarrow \lambda = -\frac{1}{2}. \text{ Per cui } \lambda = -\frac{1}{2} \text{ è lo scalare richiesto.}$$

Esercizio 4. Consideriamo i seguenti sottospazi vettoriali di \mathbb{R}^3 :

$$U = \left\langle u_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle, \quad W : \begin{cases} 3x_1 + 4x_3 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases}.$$

1. (1 punto) Trovare equazioni cartesiane per U .
2. (1 punto) Trovare una base $\{w_1\}$ di W .
3. (1 punto) Dimostrare che $\mathbb{R}^3 = U \oplus W$.
4. (1 punto) Calcolare la matrice C associata a pr_U^W (ovvero la proiezione su U lungo W) nella base $\mathcal{B} = (u_1, u_2, w_1)$.
5. (2 punti) Calcolare la matrice A associata a pr_U^W nella base canonica.
6. (1 punto) Trovare $u \in U$ e $w \in W$ tali che $u + w = 2e_1 - e_2 + e_3$.

$$1) \begin{pmatrix} -1 & -1 & | & x_1 \\ 1 & 0 & | & x_2 \\ 2 & 1 & | & x_3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & -1 & | & x_1 \\ 0 & -1 & | & x_2 + x_1 \\ 0 & 0 & | & x_3 - x_2 + x_1 \end{pmatrix} \Rightarrow U : x_1 - x_2 + x_3 = 0.$$

$$2) w_1 = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

3) w_1 non è soluzione di $x_1 - x_2 + x_3 = 0$. Quindi $U \cap W = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$. Per la formula di Grassmann, $\dim U + W = \dim U + \dim W - \dim U \cap W = 3 \Rightarrow U + W = \mathbb{R}^3$.

$$4) C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$5) \begin{array}{ccccccc} \mathbb{R}^3 & = & \mathbb{R}^3 & \xrightarrow{pr_U^W} & \mathbb{R}^3 & = & \mathbb{R}^3 \\ \downarrow F_e & & \downarrow F_B & & \downarrow F_B & & \downarrow F_e \\ \mathbb{R}^3 & \xleftarrow{B} & \mathbb{R}^3 & \xrightarrow{C} & \mathbb{R}^3 & \xrightarrow{B} & \mathbb{R}^3 \end{array}$$

$$A = BC B^{-1} \text{ dove } B = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Calcoliamo B^{-1} con Cramer: $\det B = -1$.

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & -5 & 4 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} -3 & 4 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$6) u = A \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14 \\ -1 \\ 13 \end{pmatrix} \Rightarrow w = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} - u = \begin{pmatrix} 16 \\ 0 \\ -12 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 5. Consideriamo la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. (1 punto) Dimostrare che A è ortogonalmente diagonalizzabile.
2. (1 punto) Stabilire se il vettore $v = e_1 + e_2$ è un autovettore per A .
3. (1 punto) Calcolare una base di $V_1(A)$ (=autospazio di autovalore 1).
4. (1 punto) Trovare una base ortogonale di $V_1(A)$ utilizzando l'algoritmo di Gram-Schmidt.
5. (2 punti) Utilizzando i punti precedenti, determinare lo spettro di A senza calcolare il suo polinomio caratteristico.
6. (1 punto) Trovare una matrice ortogonale B ed una matrice diagonale D tali che $B^t A B = D$.

1) $A = A^t$ Teorema spettrale reale $\implies A$ è ortogonalmente diagonalizzabile.

2) $A v = A^1 + A^2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \notin \langle v \rangle$, quindi v non è un autovettore per A .

3) $V_1(A) = \text{Ker}(\mathbb{1}_4 - A) = \text{Ker} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \implies B_{V_1(A)} = (v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix})$.

4) $F_1 = v_1$. $F_2 = v_2 - \frac{v_2 \cdot F_1}{F_1 \cdot F_1} F_1 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. $F_3 = v_3 - \frac{v_3 \cdot F_1}{F_1 \cdot F_1} F_1 - \frac{v_3 \cdot F_2}{F_2 \cdot F_2} F_2 = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ -1/3 \\ 1 \end{pmatrix}$

Una base ortogonale è (F_1, F_2, F_3) .

5) Poiché A è st. diag. e $\dim V_1(A) = 3$, $V_1(A)^\perp = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle$ è l'unico altro autospazio. $A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = -3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = 0 \implies \text{Sp}(A) = \{1, -3\}$.

6) $B = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} & 1/2 \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} & 1/2 \\ 0 & 2/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} & -1/2 \\ 0 & 0 & 3/\sqrt{2} & -1/2 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & -3 \end{pmatrix}$.