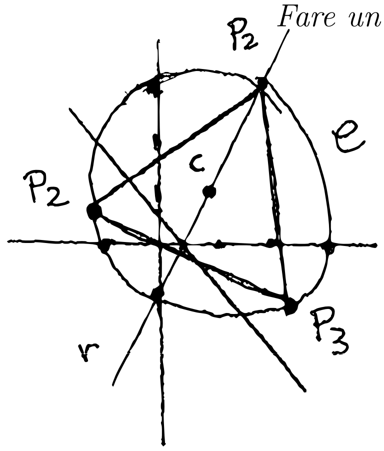
Esercizio 1. *In $(\mathbb{R}^2, \cdot)$ consideriamo i due punti* $C = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $P_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

1. *(1 punto) Scrivere equazioni parametriche e cartesiane della retta r passante per C e P_1.*
2. *(1 punto) Calcolare la pendenza della retta r.*
3. *(1 punto) Calcolare il coseno dell'angolo acuto formato tra la retta r e l'asse delle ascisse, ovvero la retta di equazione $y = 0$.*
4. *(1 punto) Calcolare la distanza tra C e P_1.*
5. *(1 punto) Scrivere l'equazione parametrica e cartesiana della circonferenza $\mathcal{C}$ di centro C e passante per il punto P_1.*
6. *(1 punto) Trovare due punti P_2 e P_3 di $\mathcal{C}$ tali che il triangolo di vertici P_1, P_2 e P_3 sia equilatero.*
7. *(1 punto) Trovare l'equazione parametrica e cartesiana della retta ottenuta riflettendo ortogonalmente l'asse delle ascisse attraverso la retta r.*

Fare un disegno che illustri la situazione.



1) $r = C + \langle \vec{CP_1} \rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \rangle : 2x - y = 1$

2) $r : y = 2x - 1 \Rightarrow m = 2$

3) $\cos(\vec{CP_1}, e_1) = \dfrac{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}{\left\|\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right\| \left\|\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\|} = \dfrac{1}{\sqrt{5}} = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$

4) $\mathrm{dist}(C, P_1) = \|\vec{CP_1}\| = \sqrt{5}$

5) $\mathcal{C} : (x-1)^2 + (y-1)^2 = 5$. $\mathcal{C} = \left\{ C + \sqrt{5} \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} \middle| \theta \in [0, 2\pi) \right\}$

6) $P_2 = C + R_{\frac{2\pi}{3}}(P_1 - C) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - \sqrt{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$

$P_3 = C + Q_m(P_2 - C) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} - \sqrt{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \sqrt{3} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$

7) $r \cap (y = 0) = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \end{pmatrix} = P_0$. $Q_m \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3/5 \\ 4/5 \end{pmatrix} \Rightarrow P_0 + \langle \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix} \rangle : 4x + 3y = 2$

Esercizio 2. *In* $(\mathbb{R}^3, \cdot)$ *siano*

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad P_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

1. *(2 punti) Calcolare equazioni cartesiane della retta r passante per i punti P_1 e P_2.*
2. *(1 punto) Stabilire se i punti P_1, P_2 e P_3 sono allineati.*
3. *(1 punto) Usare il fascio di piani per r per trovare equazioni cartesiane del piano π passante per i punti P_1, P_2 e Q.*
4. *(1 punto) Calcolare $n = \overrightarrow{P_1P_2} \wedge \overrightarrow{P_1Q}$.*
5. *(1 punto) Calcolare l'area del triangolo T di vertici P_1, P_2 e Q.*
6. *(1 punto) Calcolare la distanza di Q da r*

Sol.: 1) $r = P_1 + \langle \overrightarrow{P_1P_2} \rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle : \begin{cases} x - z = -2 \\ y - z = -1 \end{cases}$

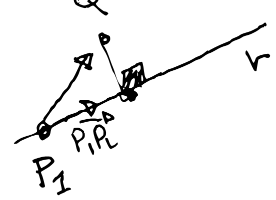
2) $\begin{cases} 3 - 5 = -2 \\ 4 - 5 = -1 \end{cases} \Rightarrow P_3 \in r \Rightarrow P_1, P_2, P_3$ sono allineati.

3) $\alpha(x - z + 2) + \beta(y - z + 1) = 0$. $\alpha(2) + \beta(1) = 0 \Rightarrow (\alpha, \beta) = (1, -2)$

$\pi : x - z + 2 - 2(y - z + 1) = 0$ ovvero $\pi : x - 2y + z = 0$

4) $n = (P_2 - P_1) \wedge (Q - P_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

5) $\text{Area}(T) = \frac{1}{2} \| n \| = \frac{1}{2} \sqrt{6}$

6) 

$pr_r(Q) = P_1 + \dfrac{\overrightarrow{P_1Q} \cdot \overrightarrow{P_1P_2}}{\overrightarrow{P_1P_2} \cdot \overrightarrow{P_1P_2}} \overrightarrow{P_1P_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \dfrac{-3}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$\text{dist}(Q, r) = \min_t \text{dist}(Q, P_1 + t\overrightarrow{P_1P_2}) = \min_t \text{dist}(Q - P_1, t\overrightarrow{P_1P_2})$$

$$= \text{dist}(\overrightarrow{P_1Q}, \langle \overrightarrow{P_1P_2} \rangle) = \| \overrightarrow{P_1Q} - pr_{\overrightarrow{P_1P_2}}(\overrightarrow{P_1Q}) \|$$

$$= \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} - \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{2}$$

Esercizio 3. *Si consideri la seguente matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -4 & 6 \\ 4 & -2 & 0 & 2 \\ -4 & 6 & 4 & -2 \\ -4 & 6 & 8 & -6 \end{pmatrix}$$

1. *(2 punti) Calcolare il polinomio caratteristico*
2. *(1 punto) Calcolare lo spettro di A.*
3. *(3 punti) Calcolare una base di ogni autospazio di A.*
4. *(1 punto) Stabilire se A è diagonalizzabile e nel caso lo sia trovare una matrice invertibile B ed una matrice diagonale D tali che $B^{-1}AB = D$.*

Sol.:

1) $$p_A(x) = \det \begin{pmatrix} x-4 & 2 & 4 & -6 \\ -4 & x+2 & 0 & -2 \\ 4 & -6 & x-4 & 2 \\ 4 & -6 & -8 & x+6 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} x & -x & 4 & -4 \\ -4 & x+2 & 0 & -2 \\ 0 & x-4 & x-4 & 0 \\ 0 & x-4 & -8 & x+4 \end{pmatrix}$$

$$= \det \begin{pmatrix} x & -x & x+4 & -4 \\ -4 & x+2 & -2-x & -2 \\ 0 & x-4 & 0 & 0 \\ 0 & x-4 & -4-x & x+4 \end{pmatrix} = -(x-4)\det \begin{pmatrix} x & x+4 & -4 \\ -4 & -2-x & -2 \\ 0 & -4-x & x+4 \end{pmatrix}$$

$$= -(x-4)\det \begin{pmatrix} x & x & -4 \\ -4 & -4-x & -2 \\ 0 & 0 & x+4 \end{pmatrix} = -(x-4)(x+4)\det \begin{pmatrix} x & x \\ -4 & -4-x \end{pmatrix} =$$

$$= x(x-4)(x+4)\det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & x+4 \end{pmatrix} = x(x-4)(x+4)\det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & x \end{pmatrix} =$$

$$= x^2(x-4)(x+4).$$

2) $Sp(A) = \{-4, 0, 4\}$

3) $$V_0(A) = \operatorname{Ker}(\operatorname{rref}(A)) = \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$V_{-4}(A) = \operatorname{Ker}(-4\mathbb{1}_4 - A) = \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$V_4(A) = \operatorname{Ker}(4\mathbb{1}_4 - A) = \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

4) A non è diagonalizzabile, poiché $mg_A(0) = 1 \neq 2 = ma_A(0)$.

Esercizio 4. *Sia V uno spazio vettoriale di dimensione 3 e sia $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ una base di V. Sia $f : V \to V$ l'unica applicazione lineare tale che*

$$f(v_1) = v_1 - 2v_2 + v_3, \quad f(v_2) = v_1 + v_3, \quad f(v_3) = v_1 + v_2 + v_3.$$

1. *(1 punto) Calcolare $f(2v_1 - v_2 + 3v_3)$.*
2. *(1 punto) Scrivere la matrice che rappresenta f nella base $\mathcal{B}$. Denotarla con A.*
3. *(1 punto) Trovare una base per il nucleo di f.*
4. *(1 punto) Trovare una base per l'immagine di f.*
5. *(1 punto) Stabilire se $V = ker(f) \oplus Im(f)$.*
6. *(1 punto) Sia $\mathcal{C} = \{w_1, w_2, w_3\}$ dove*

   $$w_1 = v_1 + 2v_2, \quad w_2 = -v_1 - v_2, \quad w_3 = v_1 + v_2 + v_3.$$

   Dimostrare che $\mathcal{C}$ è una base di V.
7. *(1 punto) Scrivere la matrice che rappresenta f nella base $\mathcal{C}$.*

Sol.: 1) $f(2v_1 - v_2 + 3v_3) = 2f(v_1) - f(v_2) + 3f(v_3) = 4v_1 - v_2 + 4v_3$

2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

3) $\operatorname{Ker} A = \operatorname{Ker} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle \Rightarrow \mathcal{B}_{\operatorname{Ker} f} = (v_1 - 3v_2 + 2v_3)$

4) $\operatorname{Col} A = \langle A^1, A^2 \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \Rightarrow \mathcal{B}_{\operatorname{Im} f} = (v_1 - 2v_2 + v_3, v_1 + v_3)$

5) $\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 2 \neq 0 \Rightarrow \operatorname{Ker} A \cap \operatorname{Col}(A) = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$

$\Rightarrow \operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f = \{0_V\}$. Per la formula di Grassmann, $\dim \operatorname{Ker} f + \operatorname{Im} f = 3 = \dim V \Rightarrow \operatorname{Ker} f + \operatorname{Im} f = V \Rightarrow V = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f$.

6) $\det(F_{\mathcal{B}}(w_1) | F_{\mathcal{B}}(w_2) | F_{\mathcal{B}}(w_3)) = \det \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow \mathcal{C}$ é una base.

7)
$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r, equal] \arrow[d, "F_{\mathcal{C}}"'] & \bullet \arrow[r, "f"] \arrow[d, "F_{\mathcal{B}}"] & \bullet \arrow[r, equal] \arrow[d, "F_{\mathcal{B}}"'] & \bullet \arrow[d, "F_{\mathcal{C}}"] \\ \bullet \arrow[r, "B"] & \bullet \arrow[r, "A"] & \bullet & \bullet \arrow[l, "B"'] \end{tikzcd}$$

$B = (F_{\mathcal{B}}(w_1) | F_{\mathcal{B}}(w_2) | F_{\mathcal{B}}(w_3))$. La matrice cercata é

$B^{-1}AB = \begin{pmatrix} -5 & 4 & -4 \\ -5 & 4 & -4 \\ 3 & -2 & 3 \end{pmatrix}$

Esercizio 5. *Consideriamo la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. *(1 punto) Dimostrare che A è ortogonalmente diagonalizzabile.*
2. *(1 punto) Stabilire se il vettore $v = e_1 + e_2$ è un autovettore per A.*
3. *(1 punto) Calcolare una base del nucleo di A.*
4. *(1 punto) Trovare una base ortogonale del nucleo di A utilizzando l'algoritmo di Gram-Schmidt.*
5. *(1 punto) Calcolare una base di $ker(A)^{\perp}$.*
6. *(1 punto) Utilizzando i punti precedenti, determinare lo spettro di A senza calcolare il suo polinomio caratteristico.*
7. *(1 punto) Trovare una matrice ortogonale B ed una matrice diagonale D tali che $B^t AB = D$.*

1) Poiché $A = A^t$, A è ortogonalmente diagonalizzabile per il Teorema spettrale.

2) $Av = A^1 + A^2 = 2\,(e_1+e_2+e_3+e_4) \notin \langle v \rangle \Rightarrow v$ non è un autovettore per A

3) $\operatorname{Ker} A = \operatorname{Ker}(1\,1\,1\,1) = \langle v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$.

4) $F_1 = v_1$, $F_2 = v_2 - \frac{v_2 \cdot F_1}{F_1 F_1} F_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ -1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$,

$F_3 = v_3 - \frac{v_3 \cdot F_2}{F_2 \cdot F_2} F_2 - \frac{v_3 \cdot F_1}{F_1 \cdot F_1} F_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1/2 \\ -1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/3 \\ -1/3 \\ -1/3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

5) Per il Teorema di decomposizione ortogonale

$(\operatorname{Ker} A)^{\perp} = Col(A^t) = Col(A) = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$.

6) $\operatorname{Ker} A = V_0(A)$. $A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow Sp(A) = \{0, 4\}$.

7) $\|F_1\| = \sqrt{2}$, $\|F_2\| = \sqrt{\frac{3}{2}}$, $\|F_3\| = \sqrt{\frac{4}{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$, $\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = 2 \Rightarrow$

$$B = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & -\sqrt{2}/2\sqrt{3} & -\sqrt{3}/6 & 1/2 \\ 1/\sqrt{2} & -\sqrt{2}/2\sqrt{3} & -\sqrt{3}/6 & 1/2 \\ 0 & \sqrt{2}/\sqrt{3} & -\sqrt{3}/6 & 1/2 \\ 0 & 0 & \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$