Nome, Cognome e Matricola

# Esame scritto di Geometria
# Ingegneria Chimica
# Quarto appello a.a. 2022/23

26 giugno 2023

**Esercizio 1.** *In* $(\mathbb{R}^2, \cdot)$ *consideriamo i due punti* $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ *e* $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

1. *(1 punto) Scrivere equazioni parametriche e cartesiane della retta* $r$ *passante per* $A$ *e* $B$.
2. *(1 punto) Calcolare la pendenza* $m$ *della retta* $r$.
3. *(1 punto) Calcolare il punto medio* $M$ *del segmento* $\overline{AB}$.
4. *(1 punto) Calcolare equazioni cartesiane dell'asse del segmento* $\overline{AB}$.
5. *(1 punto) Scrivere equazioni parametriche e cartesiane della circonferenza* $\mathcal{C}$ *avente il segmento* $\overline{AB}$ *come diametro.*
6. *(1 punto) Descrivere il seguente luogo geometrico:*

$$\mathcal{R} := \{C \in \mathbb{R}^2 | \textit{il triangolo di vertici } A, B, C \textit{ è rettangolo in } C\}.$$

7. *(1 punto) Descrivere il seguente luogo geometrico*

$$\mathcal{S} := \{C \in \mathbb{R}^2 | \textit{il triangolo di vertici } A, B, C \textit{ ha area uguale a } 2\}.$$

*Fare un disegno che illustri la situazione.*

**Esercizio 2.** *In* $(\mathbb{R}^3, \cdot)$ *consideriamo le due rette*

$$r_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle, \quad r_2 : \begin{cases} x + 2y - z & = & 1, \\ 2x + 3y - 2z & = & 2. \end{cases}$$

1. *(1 punto) Stabilire la posizione reciproca di* $r_1$ *ed* $r_2$*, senza cambiare la loro forma.*
2. *(1 punto) Calcolare equazioni cartesiane della retta* $r_1$*.*
3. *(1 punto) Calcolare equazioni parametriche della retta* $r_2$*.*
4. *(1 punto) Usare il fascio di piani per* $r_2$ *per trovare equazioni cartesiane del piano* $\pi_1$ *passante per* $r_2$ *e parallelo alla retta* $r_1$*.*
5. *(1 punto) Usare il prodotto vettoriale per trovare equazioni cartesiane del piano* $\pi_2$ *passante per* $r_1$ *e parallelo alla retta* $r_2$*.*
6. *(2 punti) Calcolare la distanza tra* $r_1$ *ed* $r_2$*.*

**Esercizio 3.** *Si consideri la seguente matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

1. *(1 punto) Calcolare* $\mathrm{rref}(A)$.
2. *(1 punto) Calcolare una base di* $\mathrm{Ker}(A)$.
3. *(1 punto) Stabilire se* $v = e_1 + e_2 - 2e_3$ *è un autovettore per* $A$.
4. *(1 punto) Calcolare la matrice* $P_{Col(A)}$ *di proiezione ortogonale su* $Col(A)$.
5. *(1 punto) Calcolare il polinomio caratteristico di* $A$.
6. *(1 punto) Stabilire se* $A$ *è diagonalizzabile su* $\mathbb{R}$.
7. *(1 punto) Stabilire se* $A$ *è diagonalizzabile su* $\mathbb{C}$.

**Esercizio 4.** *Siano $V$ e $U$ due spazi vettoriali reali e siano $\mathcal{B}_1 = (v_1, v_2, v_3)$ una base di $V$ e $\mathcal{B}_2 = (u_1, u_2)$ una base di $U$. Siano $f : V \to U$ e $g : U \to V$ le applicazioni lineari tali che*

$$\begin{array}{lll} f(v_1) = u_1 + u_2, & f(v_2) = 2u_1 + 2u_2, & f(v_3) = u_1 - u_2. \\ g(u_1) = v_1 + v_2 + v_3, & g(u_2) = v_1 - v_2 + v_3. & \end{array}$$

1. *(1 punto) Calcolare $(g \circ f)(2v_1 - v_2 + 3v_3)$.*
2. *(1 punto) Scrivere la matrice $A$ che rappresenta $f$ nelle basi $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$.*
3. *(1 punto) Scrivere la matrice $C$ che rappresenta $g$ nelle basi $\mathcal{B}_2$ e $\mathcal{B}_1$.*
4. *(1 punto) Trovare una base per il nucleo di $g \circ f$.*
5. *(1 punto) Trovare una base per l'immagine di $f \circ g$.*
6. *(1 punto) Sia $\mathcal{C} = \{w_1, w_2, w_3\}$ dove*

   $$w_1 = v_1 + 2v_2, \quad w_2 = -v_1 - v_2, \quad w_3 = v_1 + v_2 + v_3.$$

   *Dimostrare che $\mathcal{C}$ è una base di $V$.*
7. *(1 punto) Scrivere la matrice $D$ che rappresenta $g \circ f$ nella base $\mathcal{C}$.*

**Esercizio 5.** *Consideriamo la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \\ 4 & 8 & 12 & 16 \end{pmatrix}$$

1. *(1 punto) Dimostrare che $A$ è ortogonalmente diagonalizzabile.*
2. *(1 punto) Stabilire se il vettore $v = e_1 + e_2$ è un autovettore per $A$.*
3. *(1 punto) Calcolare una base del nucleo di $A$.*
4. *(1 punto) Trovare una base ortogonale del nucleo di $A$ utilizzando l'algoritmo di Gram-Schmidt.*
5. *(1 punto) Calcolare una base di $ker(A)^{\perp}$.*
6. *(1 punto) Utilizzando i punti precedenti, determinare lo spettro di $A$ senza calcolare il suo polinomio caratteristico.*
7. *(1 punto) Trovare una matrice ortogonale $B$ ed una matrice diagonale $D$ tali che $B^t AB = D$.*