Nome, Cognome e Matricola

Esame scritto di Geometria
Ingegneria Civile
Secondo appello a.a. 2022/23

30 gennaio 2023

Esercizio 1. *In* $(\mathbb{R}^2, \cdot)$ *siano* $P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $P_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ *e* $P_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

1. *(1 punto) Scrivere equazioni parametriche e cartesiane della retta* r *passante per* P_1 *e* P_2.
2. *(1 punto) Trovare il punto* P_4 *ottenuto riflettendo ortogonalmente il punto* P_3 *attraverso la retta* r.
3. *(1 punto) Trovare il punto* P_5 *ottenuto ruotando il punto* P_2 *attorno al punto* P_1 *in senso anti-orario di un angolo di* $\pi/3$.
4. *(1 punto) Dimostrare che* P_5 *appartiene alla retta passante per* P_3 *e* P_4.
5. *(1 punto) Dimostrare che il poligono* $\mathcal{Q}$ *di vertici* P_1, P_2, P_3 *e* P_4 *è un quadrato.*
6. *(1 punto) Calcolare l'equazione cartesiana e parametrica della circonferenza* $\mathcal{C}$ *inscritta nel poligono* $\mathcal{Q}$.
7. *(1 punto) Le due rette* $r_1 : (2-2\sqrt{3})x + \sqrt{3}y = 1$ *e* $r_2 : \sqrt{3}x - 2y = -2$ *sono incidenti in un punto* P. *Trovare un'equazione cartesiana della retta* s *passante per i punti* P *e* P_5 *senza calcolare* P.

Fare un disegno che illustri la situazione.

Esercizio 2. *In* $(\mathbb{R}^3, \cdot)$ *siano*

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad P_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

1. *(1 punto) Stabilire se i punti* P_1*,* P_2 *e* Q *sono allineati.*
2. *(1 punto) Calcolare equazioni cartesiane della retta* r *passante per i punti* P_1 *e* P_2*.*
3. *(1 punto) Usare il fascio di piani per* r *per trovare equazioni cartesiane del piano* π *passante per i punti* P_1*,* P_2 *e* P_3*.*
4. *(1 punto) Calcolare* $n = \overrightarrow{P_1P_2} \wedge \overrightarrow{P_1P_3}$*.*
5. *(1 punto) Calcolare l'area del triangolo* T *di vertici* P_1*,* P_2 *e* P_3*.*
6. *(2 punti) Calcolare la distanza tra le rette* $r_1 = X_1 + \langle v_1 \rangle$ *e* $r_2 = X_2 + \langle v_2 \rangle$ *dove*

$$X_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 3. *Si consideri la seguente matrice*

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 5 \\ -2 & 1 & 2 & 4 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. *(2 punti) Calcolare il polinomio caratteristico e lo spettro di A.*
2. *(2 punti) Calcolare una base di ogni autospazio di A.*
3. *(1 punto) Stabilire se A è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$ e nel caso lo sia trovare una matrice invertibile B ed una matrice diagonale D tali che $B^{-1}AB = D$.*
4. *(1 punto) Calcolare A^n per ogni $n \geq 1$.*
5. *(1 punto) Trovare uno scalare non-nullo λ tale che la matrice $\lambda(A - \mathbf{1}_4)$ sia un proiettore.*

Esercizio 4. *Consideriamo i seguenti sottospazi vettoriali di* $\mathbb{R}^3$*:*

$$U = \left\langle u_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle, \quad W : \left\{ \begin{array}{rcl} 3x_1 + 4x_3 & = & 0 \\ x_2 & = & 0 \end{array} \right. .$$

1. *(1 punto) Trovare equazioni cartesiane per* U.
2. *(1 punto) Trovare una base* $\{w_1\}$ *di* W.
3. *(1 punto) Dimostrare che* $\mathbb{R}^3 = U \oplus W$.
4. *(1 punto) Calcolare la matrice* C *associata a* pr_U^W *(ovvero la proiezione su* U *lungo* W*) nella base* $\mathcal{B} = (u_1, u_2, w_1)$.
5. *(2 punti) Calcolare la matrice* A *associata a* pr_U^W *nella base canonica.*
6. *(1 punto) Trovare* $u \in U$ *e* $w \in W$ *tali che* $u + w = 2e_1 - e_2 + e_3$.

Esercizio 5. *Consideriamo la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. *(1 punto) Dimostrare che A è ortogonalmente diagonalizzabile.*
2. *(1 punto) Stabilire se il vettore $v = e_1 + e_2$ è un autovettore per A.*
3. *(1 punto) Calcolare una base di $V_1(A)$ (=autospazio di autovalore 1).*
4. *(1 punto) Trovare una base ortogonale di $V_1(A)$ utilizzando l'algoritmo di Gram-Schmidt.*
5. *(2 punti) Utilizzando i punti precedenti, determinare lo spettro di A senza calcolare il suo polinomio caratteristico.*
6. *(1 punto) Trovare una matrice ortogonale B ed una matrice diagonale D tali che $B^t AB = D$.*