

Nome, Cognome e Matricola

Esame scritto di Geometria
Primo appello straordinario 2023
Docente: Giovanni Cerulli Irelli

3 marzo 2023

Esercizio 1. In (\mathbb{R}^2, \cdot) consideriamo i punti $A = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

1. (2 punti) Calcolare equazioni parametriche e cartesiane della retta r passante per A e B .
2. (1 punto) Calcolare la pendenza m della retta r .
3. (1 punto) Calcolare il punto P ottenuto riflettendo ortogonalmente l'origine attraverso la retta r .
4. (2 punti) Trovare un punto C ed un punto D tali che il quadrilatero \mathcal{Q} di vertici A, B, C e D sia un quadrato avente il segmento \overline{AB} come diagonale.
5. (1 punto) Trovare equazioni parametriche e cartesiane della circonferenza \mathcal{C} inscritta nel quadrato \mathcal{Q} .

Fare un disegno che illustri la situazione.

Esercizio 2. In \mathbb{R}^3 si considerino:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad Q = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1. (1 punto) Calcolare equazioni cartesiane della retta r passante per il punto P e parallela a v_1 .
2. (1 punto) Scrivere le equazioni del fascio di piani per la retta r .
3. (1 punto) Calcolare l'equazione cartesiana del piano π contenente r e passante per il punto Q .
4. (1 punto) Calcolare $v_1 \wedge v_2$.
5. (1 punto) Calcolare equazioni cartesiane del piano σ passante per P ed avente vettori direttori v_1 e v_2 .
6. (1 punto) Calcolare equazioni parametriche della retta s passante per Q e ortogonale al piano σ .
7. (1 punto) Calcolare l'area del triangolo di vertici P , $P + v_1$, $P + v_2$.

Esercizio 3. *Si consideri la seguente matrice*

$$A = \begin{pmatrix} -7 & 9 & -9 \\ -9 & 11 & -9 \\ -3 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

1. (1 punto) *Calcolare la traccia di A .*
2. (2 punti) *Calcolare il determinante di A .*
3. (1 punto) *Stabilire se il vettore $v = (1, 1, 0)^t$ è un autovettore per A .*
4. (1 punto) *Calcolare il polinomio caratteristico di A .*
5. (2 punti) *Stabilire se A è diagonalizzabile su \mathbb{R} e nel caso lo sia trovare una matrice invertibile B ed una matrice diagonale D tali che $B^{-1}AB = D$.*

Esercizio 4. Si consideri lo spazio vettoriale $V = \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ dei polinomi di grado minore o uguale di 2 a coefficienti reali. Denotiamo con $\mathcal{C} = (1, x, x^2)$ la base standard di V . Sia $T : V \rightarrow V$ l'applicazione lineare

$$T(p(x)) = p(x+1) - p(x-1).$$

Si consideri l'insieme $\mathcal{B} = (1, 1+x, 1+x+x^2)$.

1. (1 punto) Calcolare $T(2x^2 - x + 1)$.
2. (1 punto) Usando la definizione, dimostrare che T è lineare.
3. (1 punto) Scrivere la matrice A che rappresenta T nella base \mathcal{C} (sia in partenza che in arrivo).
4. (1 punto) Trovare una base per $\text{Ker}(T)$.
5. (1 punto) Trovare una base per $\text{Im}(T)$.
6. (1 punto) Dimostrare che \mathcal{B} è una base di V .
7. (1 punto) Scrivere la matrice C che rappresenta T nella base \mathcal{B} (sia in partenza che in arrivo)

Esercizio 5. Si consideri il seguente sistema lineare nelle cinque variabili reali x_1, \dots, x_5 al variare del parametro reale k :

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + (2k - 3)x_3 + (k + 3)x_4 - 3kx_5 & = & -3k - 3 \\ 2x_1 + x_2 + (2k + 6)x_3 + (3 - 2k)x_4 - kx_5 & = & 2k - 1 \\ -x_1 - 3x_3 + kx_4 - kx_5 & = & -2k - 1 \end{cases}$$

1. (1 punto) Scrivere la matrice completa $(A|b)$ del sistema.
2. (2 punti) Trovare la forma a scala ridotta di $(A|b)$ al variare di $k \in \mathbb{R}$.
3. (1 punto) Trovare tutti i valori di k per i quali il sistema è risolubile.
4. (1 punto) Per i valori di k per i quali il sistema è risolubile calcolarne una soluzione particolare.
5. (1 punto) Per i valori di k per i quali il sistema è risolubile calcolare le soluzioni-base del sistema omogeneo associato.
6. (1 punto) Per i valori di k per i quali il sistema è risolubile scrivere le equazioni parametriche dello spazio delle soluzioni.