Esame scritto di Geometria.
Ingegneria per l'ambiente ed il territorio.
Primo appello a.a. 2025/26.
Docente: Giovanni Cerulli Irelli.

19 gennaio 2025

Esercizio 1. *In* $(\mathbb{R}^2, \cdot)$ *consideriamo i punti* $P_1 = \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$, $P_2 = \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$, $P_3 = \begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$ *e* $P_4 = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$. *Denotiamo con* $r = r_{P_1P_2}$ *la retta passante per* P_1 *e* P_2.

1. *(1 punto) Calcolare i coseni direttori e la pendenza della retta* r.
2. *(1 punto) Calcolare il punto* Q *ottenuto riflettendo ortogonalmente il punto* P_4 *attraverso la retta* r.
3. *(1 punto) Calcolare l'area del triangolo* T *di vertici* P_1, P_2 *e* P_3.
4. *(1 punto) Scrivere il punto* P_4 *come combinazione convessa di* P_1, P_2 *e* P_3.
5. *(1 punto) Scrivere qui sotto la formula per l'inversa di una matrice* 2×2

$$\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix}d & -b\\ -c & a\end{pmatrix}$$

6. *(1 punto) Qui sotto, scrivere la matrice* R_θ *di rotazione in senso anti-orario di un angolo* θ:

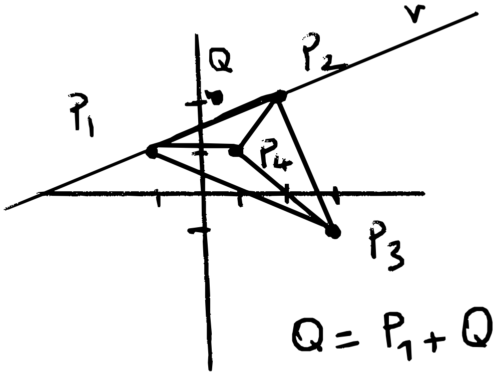
$$R_\theta = \begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$$

7. *(1 punto) Sia* $\mathcal{C} = (u_1, u_2)$ *una base di* $\mathcal{V}_O^2$ *tale che* $\det(\mathcal{C}) = -3$. *Siano*

$$v_1 = 2u_1 + 5u_2, \quad v_2 = 3u_1 - u_2, \quad v = -3u_1 + 7u_2.$$

Dimostrare che $\mathcal{B} = (v_1, v_2)$ *è una base di* $\mathcal{V}_O^2$ *e calcolare* $F_{\mathcal{B}}(v)$.

Fare un disegno che illustri la situazione.



1) $r = P_1 + \langle P_2 - P_1 \rangle = \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} \rangle : \quad x - 3y = -4$

$m = \frac{1}{3}$, $\pm \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$: coseni direttori.

2) $Q_m = \frac{1}{1+m^2}\begin{pmatrix}1-m^2 & 2m\\ 2m & m^2-1\end{pmatrix} \overset{m=\frac{1}{3}}{=} \frac{1}{5}\begin{pmatrix}4 & 3\\ 3 & -4\end{pmatrix}$

$Q = P_1 + Q_{\frac{1}{3}}(P_4 - P_1) = \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} + \frac{1}{5}\begin{pmatrix}4 & 3\\ 3 & -4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}8/5\\6/5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3/5\\11/5\end{pmatrix}$

3) $\text{Area}(T) = \frac{1}{2}\left|\det(P_2 - P_1 \mid P_3 - P_1)\right| = \frac{1}{2}\left|\det\begin{pmatrix}3 & 4\\ 1 & -2\end{pmatrix}\right| = \frac{1}{2}|-10| = 5.$

4) $\left.\begin{array}{l} \text{Area}(T_1) = \frac{1}{2}\left|\det(P_2 - P_4 \mid P_3 - P_4)\right| = \frac{1}{2}\left|\det\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & -2\end{pmatrix}\right| = 2 \\ \text{Area}(T_2) = \frac{1}{2}\left|\det(P_1 - P_4 \mid P_3 - P_4)\right| = \frac{1}{2}\left|\det\begin{pmatrix}-2 & 2\\ 0 & -2\end{pmatrix}\right| = 2 \\ \text{Area}(T_3) = \frac{1}{2}\left|\det(P_1 - P_4 \mid P_2 - P_4)\right| = \frac{1}{2}\left|\det\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right| = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow P_4 = \frac{2}{5}P_1 + \frac{2}{5}P_2 + \frac{1}{5}P_3$

7) $\det(v_1, v_2) = \det\begin{pmatrix}2 & 3\\ 5 & -1\end{pmatrix}\det(\mathcal{C}) = (-2-15)(-3) = 51 \neq 0 \Rightarrow \mathcal{B}$ è base di $\mathcal{V}_O^2$.

$F_{\mathcal{B}}(v) = \begin{pmatrix}2 & 3\\ 5 & -1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}-3\\7\end{pmatrix} = -\frac{1}{17}\begin{pmatrix}-1 & -3\\ -5 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-3\\7\end{pmatrix} = -\frac{1}{17}\begin{pmatrix}-18\\29\end{pmatrix}$

Esercizio 2. *In* $\mathbb{R}^3$ *consideriamo i tre punti* $P_1 = \begin{pmatrix}3\\2\\2\end{pmatrix}$, $P_2 = \begin{pmatrix}4\\3\\2\end{pmatrix}$, $P_3 = \begin{pmatrix}5\\2\\3\end{pmatrix}$, *i due vettori* $v_1 = \overrightarrow{P_1P_2}$ *e* $v_2 = \overrightarrow{P_1P_3}$ *e le due rette* $r_1 = P_1 + \langle v_1 + v_2 \rangle$ *e* $r_2 : \begin{cases} v_1 \cdot X = v_1 \cdot (P_1 + P_2) \\ v_2 \cdot X = v_2 \cdot (P_1 + P_2) \end{cases}$.

1. *(1 punto) Stabilire la posizione reciproca di* r_1 *ed* r_2*, senza cambiare la loro forma.*
2. *(1 punto) Calcolare* $v_1 \wedge v_2$.
3. *(1 punto) Calcolare equazioni parametriche di* r_2.
4. *(1 punto) Calcolare l'area del triangolo* T *di vertici* P_1, P_2 *e* P_3.
5. *(1 punto) Calcolare la distanza tra* r_1 *ed* r_2.
6. *(1 punto) Calcolare equazioni parametriche per la bisettrice del triangolo* T *nel vertice* P_1.
7. *(1 punto) Date due rette* $r = P_1 + \langle v_1 \rangle$ *ed* $s : AX = b$ *di* $\mathbb{R}^3$*, scrivere le condizioni di incidenza e di parallelismo di* r *ed* s *e dedurre una tabella con le quattro possibili posizioni reciproche.*

$v_1 = P_2 - P_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$, $v_2 = P_3 - P_1 = \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$, $P_1 + P_2 = \begin{pmatrix}7\\5\\4\end{pmatrix}$, $v_1 \cdot (P_1+P_2) = 12$, $v_2 \cdot (P_1+P_2) = 18$.

1) r_1 ed r_2 sono sghembe. Infatti, $v_1 \cdot (v_1+v_2) = 4 \neq 0 \Rightarrow r_1 \nparallel r_2$.

$\begin{cases} v_1 \cdot (P_1 + t(v_1+v_2)) = 12 \\ v_2 \cdot (P_2 + t(v_1+v_2)) = 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4t = 7 \\ 7t = 8 \end{cases}$ non ho soluzione $\Rightarrow r_1 \cap r_2 = \emptyset$

2) $v_1 \wedge v_2 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-1\\-2\end{pmatrix}$.

3) $r_2 = P_1 + P_2 + \langle v_1 \wedge v_2 \rangle = \begin{pmatrix}7\\5\\4\end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix}1\\-1\\-2\end{pmatrix} \right\rangle$

1) $\text{Area}(T) = \frac{1}{2} \| v_1 \wedge v_2 \| = \frac{\sqrt{6}}{2}$

) $\text{dist}(r_1, r_2) = \text{dist}(P_1 + \langle v_1+v_2 \rangle, P_1 + P_2 + \langle v_1 \wedge v_2 \rangle) = \text{dist}(P_2, \langle v_1+v_2, v_1 \wedge v_2 \rangle)$

$(v_1+v_2) \wedge (v_1 \wedge v_2) = \begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}1\\-1\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\7\\-4\end{pmatrix}$.

$\text{dist}(r_1, r_2) = \| pr_{\begin{pmatrix}-1\\7\\-4\end{pmatrix}}(P_2) \| = \dfrac{\left| \begin{pmatrix}4\\3\\2\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}-1\\7\\-4\end{pmatrix} \right|}{\left\| \begin{pmatrix}-1\\7\\-4\end{pmatrix} \right\|} = \dfrac{|-4+21-8|}{\sqrt{1+49+16}} = \dfrac{9}{\sqrt{66}}$

6) $P_1 + \left\langle \frac{v_1}{\|v_1\|} + \frac{v_2}{\|v_2\|} \right\rangle = \begin{pmatrix}3\\2\\2\end{pmatrix} + \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} \right\rangle$.

7)

	$r_1 \equiv r_2$	$r_1 \parallel r_2$	$r_1 \cap r_2 = \{P_0\}$	sghembe
$rg(Av_1)$	0	0	1	1
$-\ b - AP_1$	0	1	1	2

$P_0 = P_1 + t_0 v_1$ dove $t_0 (Av_1) = b - AP_1$

Esercizio 3. *Si consideri la seguente matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -6 & 0 \\ 8 & -7 & 0 \\ 10 & -7 & 0 \end{pmatrix}$$

1. *(1 punto) Calcolare il polinomio caratteristico di A.*
2. *(2 punti) Stabilire se A è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$ e nel caso lo sia trovare una matrice invertibile B ed una matrice diagonale D tali che $B^{-1}AB = D$.*
3. *(1 punto) Calcolare A^{2025}.*
4. *(2 punti) Sia $f : V \to V$ un endomorfismo lineare di un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale V. Dare la definizione di autovettore per f.* Dare la definizione di autovalore di f.
5. *(1 punto) Sia A una matrice $n \times n$ a coefficienti in $\mathbb{K}$. Enunciare il criterio di diagonalizzabilità su $\mathbb{K}$ di A.*

1. $$P_A(x) = \det\begin{pmatrix} x-7 & 6 & 0 \\ -8 & x+7 & 0 \\ -10 & 7 & x \end{pmatrix} = x \det\begin{pmatrix} x-7 & 6 \\ -8 & x+7 \end{pmatrix} = x \det\begin{pmatrix} x-1 & 6 \\ x-1 & x+7 \end{pmatrix} =$$

$$= x \det\begin{pmatrix} x-1 & 6 \\ 0 & x+1 \end{pmatrix} = x(x+1)(x-1) \Rightarrow Sp(A) = \{-1, 0, 1\}.$$

2. A ha 3 autovalori reali e distinti $\Rightarrow$ A è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$.

$$V_{-1}(A) = \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} -8 & 6 & 0 \\ -8 & 6 & 0 \\ -10 & 7 & -1 \end{pmatrix} = \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} -10 & 7 & -1 \\ -8 & 6 & 0 \end{pmatrix} = \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ -8 & 6 & 0 \end{pmatrix} = \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$= \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} -2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$V_0(A) = \operatorname{Ker} A = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$V_1(A) = \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} -6 & 6 & 0 \\ -8 & 8 & 0 \\ -10 & 7 & 1 \end{pmatrix} = \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -10 & 7 & 1 \end{pmatrix} = \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -10 & 7 & 1 \end{pmatrix} = \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1/3 \end{pmatrix} = \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/3 \\ 0 & 1 & -1/3 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$B = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 \\ -4 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3) $A^{2025} = (BDB^{-1})^{2025} = BD^{2025}B^{-1} = BDB^{-1} = A$

4) <u>Autovettore</u> := È un vettore non-nullo $v \in V$ t.c. $f(v) \in \langle v \rangle$

<u>Autovalore</u> := È uno scalare $\lambda \in \mathbb{K}$ t.c. $\exists\, v \in V \setminus \{0_V\}$ t.c. $f(v) = \lambda v$.

6) $Sp(A) \subset \mathbb{K}$ e $ma_A(\lambda) = mg_A(\lambda)$ $\forall \lambda \in Sp(A)$.

Esercizio 4. *Denotiamo $V = \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$. Consideriamo la funzione $f : V \to V$ data da*

$$f(p(x)) = (x-1)p(x+1) + (x^2-1)p''(x^2+1) + (x+1)p'(x^2-1) - 3xp(x)$$

1. *(1 punto) Calcolare $f(5+7x-x^2)$.*
2. *(1 punto) Dimostrare che f è lineare.*
3. *(1 punto) Calcolare la matrice A associata ad f nella base standard di V.*
4. *(1 punto) Dimostrare che f è invertibile.*
5. *(1 punto) Calcolare $f^{-1}(1+x+2x^2)$.*
6. *(1 punto) Sia $W = \mathbb{R}[x]_{\leq 1}$. Dimostrare che $\mathcal{B} = (1+x, 1-x)$ è una base di W e definire la funzione lineare $g : W \to V$ tale che $g(1+x) = 1-2x+x^2$ e $g(1-x) = 2+3x-2x^2$. Calcolare la matrice C associata ad $f \circ g$ nelle basi standard di V e W.*
7. *(1 punto) Siano V e W due $\mathbb{K}$-spazi vettoriali e siano date due applicazioni lineari $f : V \to W$ e $g : W \to V$ tali che f è suriettiva e g è iniettiva. Trovare una condizione che garantisca che $g \circ f$ è un isomorfismo lineare.*

1) $f(5+7x-x^2) = -19x^2$

2) $f = m_{x-1} \circ Val_{x+1} + m_{x^2-1} \circ Val_{x^2+1} \circ D \circ D + m_{x+1} \circ Val_{x^2-1} \circ D - m_{3x}$

f è quindi una combinazione lineare di composizioni di funzioni lineari ed è quindi lineare.

3) $f(1) = -1-2x$; $f(x) = x - 2x^2$; $f(x^2) = -5-3x+5x^2$. $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -5 \\ -2 & 1 & -3 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}$

4) $\det A = \det \begin{pmatrix} -1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & -2 & -1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} -1 & -5 \\ -4 & -1 \end{pmatrix} = -19 \neq 0 \Rightarrow f$ è invertibile

5) $A^{-1} = -\frac{1}{19} \begin{pmatrix} -1 & 10 & 5 \\ 10 & -5 & 7 \\ 4 & -2 & -1 \end{pmatrix}$. $A^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{19} \begin{pmatrix} 19 \\ 19 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow f^{-1}(1+x+2x^2) = -1-x$

6) $1-x \notin \langle 1+x \rangle \Rightarrow \mathcal{B}$ è base di W. $C = ADB^{-1} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -14 & 14 \\ 2 & 14 \\ 9 & -31 \end{pmatrix}$, dove $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$.

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, equal] \arrow[d, "F_e"] & W \arrow[r, "g"] \arrow[d, "F_{\mathcal{B}}"] & V \arrow[r] \arrow[d, "F_e"] & V \arrow[d, "F_e"] \\ \mathbb{R}^2 & \mathbb{R}^2 \arrow[l, "B"'] \arrow[r, "D"] & \mathbb{R}^3 \arrow[r, "A"] & \mathbb{R}^3 \end{tikzcd}$$

7) $\dim V = \dim W$.

Esercizio 5. *Si consideri il vettore* $v = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$, *la matrice* $A = vv^t$ *ed il punto* $Q = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$

1. *(1 punto) Calcolare* A.
2. *(1 punto) Trovare una base per* $Col(A)$ *e calcolare il rango di* A.
3. *(1 punto) Calcolare una base* $\mathcal{B}_{Ker(A)}$ *del nucleo di* A.
4. *(1 punto) Dimostrare che* A *è ortogonalmente diagonalizzabile.*
5. *(1 punto) Trovare una matrice ortogonale* B *ed una matrice diagonale* D *tali che* $B^tAB = D$.
6. *(1 punto) Calcolare la proiezione ortogonale di* Q *sulla retta generata da* v *e la distanza di* Q *dall'iperpiano* $\pi = v^\perp$.
7. *(1 punto) Sia* A *una matrice di taglia* 5×7. *E' possibile che* A^tA *sia invertibile? Perché?*

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. 2. $\mathcal{B}_{Col A} = (v)$. $\mathrm{rg}\, A = 1$.

3. $\mathrm{Ker}\, A = v^\perp : -x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0$. $\mathcal{B}_{Ker A} = \left(v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

4. $A^t = (vv^t)^t = (v^t)^t v^t = vv^t = A$. Per il teorema spettrale A è ort. diag.

5. $F_1 = v_1$. $F_1 \cdot F_1 = 2$. $F_2' = v_2 - \frac{v_2 \cdot F_1}{2} F_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$F_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $F_2 \cdot F_2 = 6$. $F_3' = v_3 - \frac{v_3 \cdot F_1}{2} F_1 - \frac{v_3 \cdot F_2}{6} F_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

$F_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $F_3 \cdot F_3 = 12$.

$B = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{12} & -1/2 \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{12} & 1/2 \\ 0 & 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{12} & -1/2 \\ 0 & 0 & 3/\sqrt{12} & 1/2 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

6. $pr_v(Q) = \frac{Q \cdot v}{v \cdot v} v = -\frac{5}{4} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. $\mathrm{dist}(Q, v^\perp) = \| pr_v(Q) \| = \frac{5}{2}$

7. No, non è possibile. Infatti, se A^tA fosse invertibile, allora $7 = \mathrm{rg}\, A^tA = \mathrm{rg}\, A \leq 5$, assurdo!.