Esame scritto di Geometria.
Ingegneria per l'ambiente ed il territorio.
Primo appello a.a. 2025/26.
Docente: Giovanni Cerulli Irelli.

19 gennaio 2025

Esercizio 1. *In* $(\mathbb{R}^2, \cdot)$ *consideriamo i punti* $P_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $P_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $P_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ *e* $P_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. *Denotiamo con* $r = r_{P_1P_2}$ *la retta passante per* P_1 *e* P_2.

1. *(1 punto) Calcolare i coseni direttori e la pendenza della retta* r.
2. *(1 punto) Calcolare il punto* Q *ottenuto riflettendo ortogonalmente il punto* P_4 *attraverso la retta* r.
3. *(1 punto) Calcolare l'area del triangolo* T *di vertici* P_1, P_2 *e* P_3.
4. *(1 punto) Scrivere il punto* P_4 *come combinazione convessa di* P_1, P_2 *e* P_3.
5. *(1 punto) Scrivere qui sotto la formula per l'inversa di una matrice* 2×2

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} =$$

6. *(1 punto) Qui sotto, scrivere la matrice* R_θ *di rotazione in senso anti-orario di un angolo* θ*:*

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{pmatrix}$$

7. *(1 punto) Sia* $\mathcal{C} = (u_1, u_2)$ *una base di* $\mathcal{V}_O^2$ *tale che* $\det(\mathcal{C}) = -3$. *Siano*

$$v_1 = 2u_1 + 5u_2, \quad v_2 = 3u_1 - u_2, \quad v = -3u_1 + 7u_2.$$

Dimostrare che $\mathcal{B} = (v_1, v_2)$ *è una base di* $\mathcal{V}_O^2$ *e calcolare* $F_{\mathcal{B}}(v)$.

Fare un disegno che illustri la situazione.

Esercizio 2. *In* $\mathbb{R}^3$ *consideriamo i tre punti* $P_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $P_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $P_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, *i due vettori* $v_1 = \overrightarrow{P_1P_2}$ *e* $v_2 = \overrightarrow{P_1P_3}$ *e le due rette* $r_1 = P_1 + \langle v_1 + v_2 \rangle$ *e* $r_2 : \begin{cases} v_1 \cdot X = v_1 \cdot (P_1 + P_2) \\ v_2 \cdot X = v_2 \cdot (P_1 + P_2) \end{cases}$.

1. *(1 punto) Stabilire la posizione reciproca di* r_1 *ed* r_2*, senza cambiare la loro forma.*
2. *(1 punto) Calcolare* $v_1 \wedge v_2$.
3. *(1 punto) Calcolare equazioni parametriche di* r_2.
4. *(1 punto) Calcolare l'area del triangolo* T *di vertici* P_1, P_2 *e* P_3.
5. *(1 punto) Calcolare la distanza tra* r_1 *ed* r_2.
6. *(1 punto) Calcolare equazioni parametriche per la bisettrice del triangolo* T *nel vertice* P_1.
7. *(1 punto) Date due rette* $r = P_1 + \langle v_1 \rangle$ *ed* $s : AX = b$ *di* $\mathbb{R}^3$*, scrivere le condizioni di incidenza e di parallelismo di* r *ed* s *e dedurre una tabella con le quattro possibili posizioni reciproche.*

Esercizio 3. *Si consideri la seguente matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -6 & 0 \\ 8 & -7 & 0 \\ 10 & -7 & 0 \end{pmatrix}$$

1. *(1 punto) Calcolare il polinomio caratteristico di A.*
2. *(2 punti) Stabilire se A è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$ e nel caso lo sia trovare una matrice invertibile B ed una matrice diagonale D tali che $B^{-1}AB = D$.*
3. *(1 punto) Calcolare A^{2025}.*
4. *(2 punti) Sia $f : V \to V$ un endomorfismo lineare di un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale V. Dare la definizione di autovettore di f. Dare la definizione di autovalore di f.*
5. *(1 punto) Sia A una matrice $n \times n$ a coefficienti in $\mathbb{K}$. Enunciare il criterio di diagonalizzabilità su $\mathbb{K}$ di A.*

Esercizio 4. *Denotiamo* $V = \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$. *Consideriamo la funzione* $f : V \to V$ *data da*

$$f(p(x)) = (x-1)p(x+1) + (x^2-1)p''(x^2+1) + (x+1)p'(x^2-1) - 3xp(x)$$

1. *(1 punto) Calcolare* $f(5 + 7x - x^2)$.
2. *(1 punto) Dimostrare che* f *è lineare.*
3. *(1 punto) Calcolare la matrice* A *associata ad* f *nella base standard di* V.
4. *(1 punto) Dimostrare che* f *è invertibile.*
5. *(1 punto) Calcolare* $f^{-1}(1 + x + 2x^2)$.
6. *(1 punto) Sia* $W = \mathbb{R}[x]_{\leq 1}$. *Dimostrare che* $\mathcal{B} = (1+x, 1-x)$ *è una base di* W *e definire la funzione lineare* $g : W \to V$ *tale che* $g(1+x) = 1 - 2x + x^2$ *e* $g(1-x) = 2 + 3x - 2x^2$. *Calcolare la matrice* C *associata ad* $f \circ g$ *nelle basi standard di* V *e* W.
7. *(1 punto) Siano* V *e* W *due* $\mathbb{K}$*-spazi vettoriali e siano date due applicazioni lineari* $f : V \to W$ *e* $g : W \to V$ *tali che* f *è suriettiva e* g *è iniettiva. Trovare una condizione che garantisca che* $g \circ f$ *è un isomorfismo lineare.*

Esercizio 5. *Si consideri il vettore* $v = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$, *la matrice* $A = vv^t$ *ed il punto* $Q = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$

1. *(1 punto) Calcolare* A.
2. *(1 punto) Trovare una base per* $Col(A)$ *e calcolare il rango di* A.
3. *(1 punto) Calcolare una base* $\mathcal{B}_{Ker(A)}$ *del nucleo di* A.
4. *(1 punto) Dimostrare che* A *è ortogonalmente diagonalizzabile.*
5. *(1 punto) Trovare una matrice ortogonale* B *ed una matrice diagonale* D *tali che* $B^tAB = D$.
6. *(1 punto) Calcolare la proiezione ortogonale di* Q *sulla retta generata da* v *e la distanza di* Q *dall'iperpiano* $\pi = v^\perp$.
7. *(1 punto) Sia* A *una matrice di taglia* 5×7. *E' possibile che* A^tA *sia invertibile? Perché?*