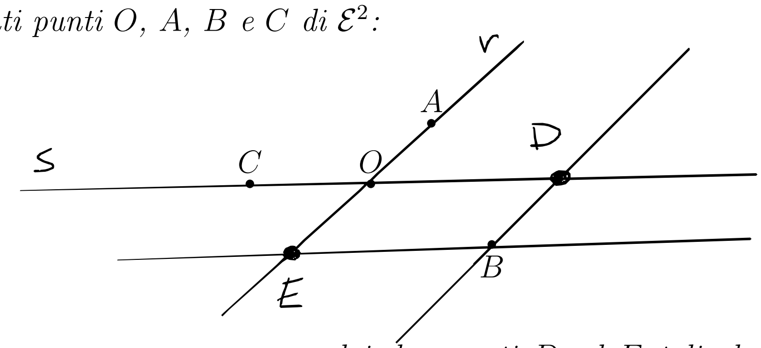
Esame scritto di Geometria.
Ingegneria per l'ambiente ed il territorio.
Secondo appello a.a. 2025/26.
Docente: Giovanni Cerulli Irelli.

3 febbraio 2026

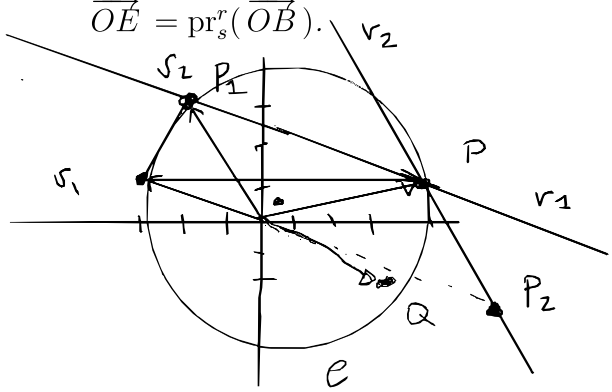
Esercizio 1. *In* $(\mathbb{R}^2,\cdot)$ *consideriamo i vettori* $v_1 = \begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix}$ *e* $v_2 = \begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$ *ed il punto* $P = \begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}$. *Consideriamo anche le due rette* $r_1 = P + \langle v_1\rangle$ *e* $r_2 = P + \langle v_2\rangle$.

1. *Calcolare* $\cos\widehat{v_1v_2}$.
2. *Calcolare* $F_{\mathcal{B}}(P)$.
3. *Calcolare* $P_1 = \mathrm{pr}_{r_1}^{r_2}(\overrightarrow{OP})$ *e* $P_2 = \mathrm{pr}_{r_2}^{r_1}(\overrightarrow{OP})$.
4. *Calcolare l'equazione cartesiana della retta* r_1.
5. *Calcolare equazioni parametriche e cartesiane della circonferenza* $\mathcal{C}$ *passante per* P *e per le punte di* v_1 *e di* v_2.
6. *Calcolare il punto* Q *ottenuto ruotando il punto* P *attorno all'origine di un angolo di* $60°$ *in senso orario.*
7. *Consideriamo i seguenti punti* O, A, B *e* C *di* $\mathcal{E}^2$:



Disegnare le due rette $r = r_{OA}$ *e* $s = r_{OC}$ *ed i due punti* D *ed* E *tali che* $\overrightarrow{OD} = \mathrm{pr}_r^s(\overrightarrow{OB})$ *e* $\overrightarrow{OE} = \mathrm{pr}_s^r(\overrightarrow{OB})$.

Sol



1) $\cos\widehat{v_1v_2} = \dfrac{v_1\cdot v_2}{\|v_1\|\|v_2\|} = \dfrac{9}{\sqrt{10}\sqrt{13}} > 0$ (acuto)

2) $P = x_1v_1 + x_2v_2$. $x_1 = \dfrac{\det(P,v_2)}{\det(v_1,v_2)} = -2$, $x_2 = \dfrac{\det(v_1,P)}{\det(v_1,v_2)} = 1$

$F_{\mathcal{B}}(P) = \begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$

3) $P_1 = x_1v_1 = -2v_1 = \begin{pmatrix}6\\-2\end{pmatrix}$, $P_2 = x_2v_2 = v_2 = \begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$

4) $x + 3y = 7$

5) $\mathcal{C}$ = circonferenza circoscritta a $T = v_1v_2P$. Asse v_1v_2: $x + 2y = \frac{3}{2}$. Asse v_2P: $3x - y = 1$

centro: $\begin{cases} x + 2y = 3/2 \\ 3x - y = 1 \end{cases} \Rightarrow C = \begin{pmatrix}1/2\\1/2\end{pmatrix}$, raggio $= \mathrm{dist}(P,C) = \left\|\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1/2\\1/2\end{pmatrix}\right\| = \frac{1}{2}\left\|\begin{pmatrix}7\\1\end{pmatrix}\right\| = \frac{\sqrt{50}}{2}$

$\mathcal{C}: \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{25}{2}$, $\mathcal{C} = \left\{ \begin{pmatrix}1/2\\1/2\end{pmatrix} + \frac{\sqrt{50}}{2}\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix} \,\middle|\, \forall\theta\in[0,2\pi] \right\}$.

6) $Q = R_{-60°}P = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}4+\sqrt{3}\\ -4\sqrt{3}+1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2+\sqrt{3}/2\\ \frac{1}{2} - 2\sqrt{3}\end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix}3{,}3\\ -2{,}1\end{pmatrix}$ $\quad R_\theta = \begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix} \underset{\theta=-60°}{=} \begin{pmatrix}1/2 & \sqrt{3}/2\\ -\sqrt{3}/2 & 1/2\end{pmatrix}$

Esercizio 2. *In $\mathbb{R}^3$ consideriamo le due rette*

$$r : \begin{cases} x - y + z &= 1 \\ x + 2y - 2z &= 1 \end{cases} \qquad s : \begin{cases} x + y - z &= -1 \\ x + 2y + z &= -2 \end{cases}$$

1. *(1 punto) Stabilire la posizione reciproca di r ed s senza cambiare la loro forma.*
2. *(1 punto) Usare il prodotto vettoriale per trovare un vettore direttore v di r e w di s.*
3. *(1 punto) Calcolare equazioni parametriche di r e di s.*
4. *(1 punto) Trovare equazioni cartesiane del piano π passante per s e parallelo ad r.*
5. *(1 punto) Calcolare la distanza tra r e π.*
6. *(1 punto) Dimostrare la seguente formula: data una retta $r = P_0 + \langle v \rangle$ ed un punto $P \in \mathbb{R}^3$, allora*

$$\operatorname{dist}(P, r) = \frac{\|(P - P_0) \wedge v\|}{\|v\|}$$

7. *(1 punto) Usare la formula precedente per trovare l'equazione del cilindro* H *di asse r e tangente a π.*

Sol. 1)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 & 1 \\ \hline 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & -2 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \\ \hline 0 & 2 & -2 & -2 \\ 0 & 3 & 0 & -3 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ \hline 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ \hline 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

r ed s sono sghembe.

2) $v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

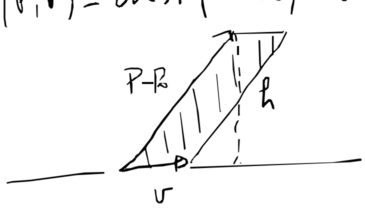
3) $r = e_1 + \langle v \rangle$. $s = -e_2 + \langle w \rangle$.

4) $\pi = -e_2 + \langle v, w \rangle : v \wedge w \cdot X = v \wedge w \cdot (-e_2)$. $\quad v \wedge w = 3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} = 9 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

$\pi = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle : x + y - z = -1$

5) r e π sono paralleli quindi $\operatorname{dist}(r, \pi) = \operatorname{dist}(e_1, \pi) = \frac{|2|}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$

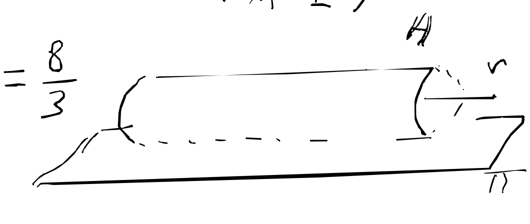
6) $\operatorname{dist}(P, r) = \operatorname{dist}(P - P_0, \langle v \rangle) = h$



$$\left.\begin{array}{l} \text{Area } P(v, P-P_0) = h\|v\| \\ \text{Area } P(v, P-P_0) = \|(P-P_0) \wedge v\| \end{array}\right\} \Rightarrow h = \frac{\|(P-P_0) \wedge v\|}{\|v\|}$$

7) $H : \|(X - e_1) \wedge v\|^2 = \frac{4}{3}\|v\|^2$. $\quad H : \left\|(X - e_1) \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\|^2 = \frac{8}{3}$. $\quad (X - e_1) \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 - x_3 \\ 1 - x_1 \\ x_1 - 1 \end{pmatrix}$

$H : (x_2 - x_3)^2 + 2(x_1 - 1)^2 = \frac{8}{3} \iff H : 2x_1^2 - 4x_1 + 2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_2x_3 = \frac{8}{3}$



Esercizio 3. *Si consideri la seguente matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 5 & -3 \\ 1 & -3 & 5 & -3 \\ -1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -6 & 3 \end{pmatrix}$$

1. *(1 punto) Calcolare il polinomio caratteristico di A.*
2. *(1 punto) Calcolare il determinante di A.*
3. *(1 punto) Calcolare lo spettro di A.*
4. *(1 punto) Trovare una base dell' autospazio di autovalore 1.*
5. *(1 punto) Stabilire se A è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$.*
6. *(1 punto) Sia $n \geq 2$ un intero e $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$. Che cosa vuol dire che A è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$?*
7. *(1 punto) E' vero che ogni matrice reale è diagonalizzabile sui reali? E sui complessi? (Se è vero dimostrarlo,altrimenti fornire un controesempio.)*

Sol

1) $$P_A(x) = \det\begin{pmatrix} x-2 & 4 & -5 & 3 \\ -1 & x+3 & -5 & 3 \\ 1 & -2 & x+2 & -1 \\ 0 & -2 & 6 & x-3 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} x-1 & -x+1 & 0 & 0 \\ -1 & x+3 & -5 & 3 \\ 1 & -2 & x+2 & -1 \\ 0 & -2 & 6 & x-3 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} x-1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & x+2 & -5 & 3 \\ 1 & -1 & x+2 & -1 \\ 0 & -2 & 6 & x-3 \end{pmatrix}$$

$$= (x-1)\det\begin{pmatrix} x+2 & -5 & 3 \\ -1 & x+2 & -1 \\ -2 & 6 & x-3 \end{pmatrix} = (x-1)\det\begin{pmatrix} x-1 & -5 & 3 \\ 0 & x+2 & -1 \\ -x+1 & 6 & x-3 \end{pmatrix} = (x-1)\det\begin{pmatrix} x-1 & -5 & 3 \\ 0 & x+2 & -1 \\ 0 & 1 & x \end{pmatrix} = (x-1)^2(x+1)^2$$

2) $\det(A) = P_A(0) = 1$ 3) $Sp(A) = \{1, -1\}$.

4) $$V_1(A) = \ker(\mathbb{1}_4 - A) = \ker\begin{pmatrix} -1 & 4 & -5 & 3 \\ -1 & 4 & -5 & 3 \\ 1 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 6 & -2 \end{pmatrix} = \ldots = \ker\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \quad \mathcal{B}_{V_1(A)} = \left(\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

5) A non è diagonalizzabile perché $ma_A(1) = 2 > 1 = mg_A(1)$.

6) Vuol dire che $\exists\, B, D \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$, B invertibile e D diagonale, tali che $B^{-1}AB = D$.

7) No, non è vero né sui reali né sui complessi. Ad esempio, la matrice di rotazione $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ per $0 < \theta < 2\pi$, $\theta \neq \pi$, non è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$ ma lo è su $\mathbb{C}$. Invece il blocco di Jordan $J_n(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & & 0 & \lambda \end{pmatrix}$ non è diagonalizzabile né su $\mathbb{R}$ né su $\mathbb{C}$ perché $mg_{J_n(\lambda)}(\lambda) = 1 < n = ma_{J_n(\lambda)}(\lambda)$.

Esercizio 4. *Consideriamo i seguenti insiemi*

$$\mathcal{B}_1 = \left(v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right) \subset \mathbb{R}^2, \quad \mathcal{B}_2 = \left(w_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, w_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \subset \mathbb{R}^3$$

1. *(1 punto) Dimostrare che $\mathcal{B}_1$ è un base di $\mathbb{R}^2$ e che $\mathcal{B}_2$ è una base di $\mathbb{R}^3$.*
2. *(1 punto) Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ la funzione lineare tale che $f(v_1) = w_1 - w_2 + w_3$ e $f(v_2) = w_1 + w_3$. Calcolare la matrice F associata a f nelle basi $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$.*
3. *(1 punto) Sia $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ la funzione definita come segue:*

$$g(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}) = (-4x - 3y + 2z)v_1 + (3x + 2y - 2z)v_2$$

   Dimostrare che g è lineare.

4. *(1 punto) Calcolare la matrice G associata a g nelle basi standard $\mathcal{C}_3 = (e_1, e_2, e_3)$ e $\mathcal{C}_2 = (e_1, e_2)$.*
5. *(1 punto) Calcolare la matrice A associata a $g \circ f$ nella base standard $\mathcal{C}_2$.*
6. *(1 punto) Stabilire se $g \circ f$ è invertibile e nel caso lo sia calcolare la sua inversa; altrimenti trovare una base per il suo nucleo e per la sua immagine.*
7. *(1 punto) Calcolare l'inversa della matrice $B_2 = (w_1|w_2|w_3)$.*

Sol.: 1) $\det(v_1, v_2) = 1 \neq 0$, $\det(w_1, w_2, w_3) = \det\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = -\det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 1 \neq 0$

2) $F = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ 3) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\forall X, Y \in \mathbb{R}^3$,

$$g(\alpha X + \beta Y) = (-4(\alpha x_1 + \beta y_1) - 3(\alpha x_2 + \beta y_2) + 2(\alpha x_3 + \beta y_3))v_1 + (3(\alpha x_1 + \beta y_1) + 2(\alpha x_2 + \beta y_2) - 2(\alpha x_3 + \beta y_3))v_2 =$$

$$= \alpha[(-4x_1 - 3x_2 + 2x_3)v_1 + (3x_1 + 2x_2 - 2x_3)v_2] + \beta[(-4y_1 - 3y_2 + 2y_3)v_1 + (3y_1 + 2y_2 - 2y_3)v_2] =$$

$$= \alpha g(X) + \beta g(Y)$$

4) $g(e_1) = -4v_1 + 3v_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ -8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$; $g(e_2) = -3v_1 + 2v_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $g(e_3) = 2v_1 - 2v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$

$$G = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

5)
$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^2 \arrow[r, phantom, "="] \arrow[d, "F_C"'] & \mathbb{R}^2 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "F_{B_1}"] & \mathbb{R}^3 \arrow[r, phantom, "="] \arrow[d, "F_{B_2}"] & \mathbb{R}^3 \arrow[r, "g"] \arrow[d, "F_e"] & \mathbb{R}^2 \arrow[d, "F_e"] \\ \mathbb{R}^2 & \mathbb{R}^2 \arrow[l, "B_1"'] \arrow[r, "F"] & \mathbb{R}^3 \arrow[r, "B_2"] & \mathbb{R}^3 \arrow[r, "G"] & \mathbb{R}^2 \end{tikzcd}$$

$$A = G B_2 F B_1^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

6) $g \circ f = S_A$ non è invertibile. $\operatorname{Ker} g \circ f = \operatorname{Ker} A = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$, $\operatorname{Im} g \circ f = \operatorname{Col} A = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$.

7) $B_2^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \underset{\text{Cramer}}{=} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

Esercizio 5. *In $\mathbb{R}^4$, consideriamo:*

$$U : \begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_4 & = 0 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 & = 0 \end{cases}, \quad W = \left\langle \overset{w_1}{\begin{pmatrix}1\\2\\-1\\1\end{pmatrix}}, \overset{w_2}{\begin{pmatrix}1\\3\\-1\\2\end{pmatrix}} \right\rangle, \quad P = \begin{pmatrix}4\\4\\4\\4\end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}.$$

1. *(1 punto) Calcolare una base $\mathcal{B}_U$ di U.*
2. *(2 punti) Calcolare la matrice P_U di proiezione ortogonale su U.*
3. *(1 punto) Calcolare la distanza di P da U.*
4. *(2 punti) Calcolare la dimensione di $U \cap W$ e la dimensione di $U + W$.*
5. *(1 punto) Trovare una base ortogonale di $U + W$ e calcolare la proiezione ortogonale di Q su $U + W$ utilizzando i coefficienti di Fourier.*

Sol: 1) $\mathcal{B}_U = \left(v_1 = \begin{pmatrix}-1\\2\\1\\0\end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}\right)$. Infatti:

$$U = \operatorname{Ker}\begin{pmatrix}2 & 1 & 0 & -1\\ 1 & -1 & 3 & 1\end{pmatrix} = \operatorname{Ker}\begin{pmatrix}1 & -1 & 3 & 1\\ 2 & 1 & 0 & -1\end{pmatrix} = \operatorname{Ker}\begin{pmatrix}1 & -1 & 3 & 1\\ 0 & 3 & -6 & -3\end{pmatrix} = \operatorname{Ker}\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -2 & -1\end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix}-1\\2\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix} \right\rangle$$

2) Poniamo $A = (v_1\ v_2) = \begin{pmatrix}-1 & 0\\ 2 & 1\\ 1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ e calcoliamo $P_U = A(A^tA)^{-1}A^t$. Otteniamo

$$P_U = \frac{1}{4}\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 2 & 1\\ 1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 2 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1\end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix}1 & -1 & -1 & 1\\ -1 & 3 & 1 & 1\\ -1 & 1 & 1 & -1\\ 1 & 1 & -1 & 3\end{pmatrix}$$

3) $P_U P = \begin{pmatrix}0\\4\\0\\4\end{pmatrix}$. $\operatorname{dist}(P, U) = \|P - P_U P\| = \left\| \begin{pmatrix}4\\0\\4\\0\end{pmatrix} \right\| = 4\sqrt{2}$

4) $\begin{cases} 2(s+t) + 2s + 3t - s - 2t = 0 \\ s + t - 2s - 3t - 3s - 3t + s + 2t = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 3s + 3t = 0 \\ -3s - 3t = 0 \end{cases} \iff s + t = 0 \implies U \cap W = \left\langle \overset{= v_2}{\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}} \right\rangle$

$\dim U \cap W = 1$. $\dim U + W \underset{\text{GRASSMANN}}{=} \dim U + \dim W - \dim U \cap W = 3$

5) $\mathcal{B}_{U+W} = \left(v_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}, v_1 = \begin{pmatrix}-1\\2\\1\\0\end{pmatrix}, w_1 = \begin{pmatrix}1\\2\\-1\\1\end{pmatrix}\right)$. $F_1 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}$. $F_2 = v_1 - \frac{v_1 \cdot v_2}{v_2 \cdot v_2} v_2 = \begin{pmatrix}-1\\1\\1\\-1\end{pmatrix}$.

$F_3' = \begin{pmatrix}1\\2\\-1\\1\end{pmatrix} - \frac{3}{2}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix} + \frac{1}{4}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\\-1\end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix}3\\3\\-3\\-3\end{pmatrix}$. $F_3 = \begin{pmatrix}1\\1\\-1\\-1\end{pmatrix}$.

$$pr_{U+W}(Q) = \frac{Q \cdot F_1}{F_1 \cdot F_1} F_1 + \frac{Q \cdot F_2}{F_2 \cdot F_2} F_2 + \frac{Q \cdot F_3}{F_3 \cdot F_3} F_3 = 3\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix}-1\\1\\1\\-1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\1\\-1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\2\\1\\4\end{pmatrix}$$