Esame scritto di Geometria.
Ingegneria Chimica.
Primo appello a.a. 2025/26.
Docente: Giovanni Cerulli Irelli.

19 gennaio 2026

Esercizio 1. *In* $(\mathbb{R}^2, \cdot)$ *consideriamo i punti* $P_1 = \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$, $P_2 = \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$, $P_3 = \begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$ *e* $P_4 = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$. *Denotiamo con* $r = r_{P_1P_2}$ *la retta passante per* P_1 *e* P_2.

1. *(1 punto) Calcolare equazioni ~~parametriche e~~ cartesiane degli assi dei segmenti* P_1P_2 *e* P_1P_3.
2. *(1 punto) Calcolare equazioni parametriche della circonferenza* ℓ *circoscritta al triangolo* $T = P_1P_2P_3$.
3. *(1 punto) Scrivere* P_4 *come combinazione convessa di* P_1, P_2, P_3 *e* P_4.
4. *(1 punto) Calcolare il punto* Q *ottenuto riflettendo ortogonalmente il punto* P_4 *attraverso la retta* r.
5. *(1 punto) Calcolare l'area dell'inviluppo convesso di* P_1, P_2, P_3, P_4 *e* Q.
6. *(1 punto) Scrivere qui sotto la formula per l'inversa di una matrice* 2×2

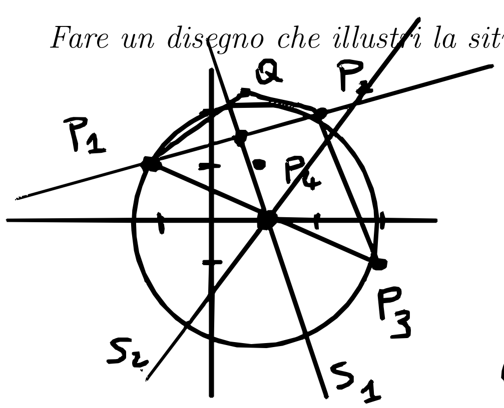
$$\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix}d & -b\\ -c & a\end{pmatrix}$$

7. *(1 punto) Sia* $\mathcal{C} = (u_1, u_2)$ *una base di* $\mathcal{V}_O^2$ *tale che* $\det(\mathcal{C}) = -3$. *Siano*

$$v_1 = 2u_1 + 5u_2, \quad v_2 = 3u_1 - u_2, \quad v = -3u_1 + 7u_2.$$

Dimostrare che $\mathcal{B} = (v_1, v_2)$ *è una base di* $\mathcal{V}_O^2$ *e calcolare* $F_{\mathcal{B}}(v)$.

Fare un disegno che illustri la situazione.



1) $s_1 : \overrightarrow{P_1P_2} \cdot X = \frac{P_2^2 - P_1^2}{2}$; $s_1 : 3x + y = 3$

$s_2 : \overrightarrow{P_1P_3} \cdot X = \frac{P_3^2 - P_1^2}{2}$; $s_2 : 4x - 2y = 4$

2) $s_1 \cap s_2 = C = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$. $r = \| P_1 - C \| = \| \begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix} \| = \sqrt{5}$

$\ell = \{ \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \sqrt{5}\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix} \mid \forall \theta \in [0, 2\pi) \} : (x-1)^2 + y^2 = 5$

3) $\text{Area}(T) = \frac{1}{2} |\det(P_2 - P_1 | P_3 - P_1)| = \frac{1}{2} |\det\begin{pmatrix}3 & 4\\ 1 & -2\end{pmatrix}| = 5$

$\text{Area}(T_1) = \frac{1}{2} |\det(P_2 - P_4 | P_3 - P_4)| = \frac{1}{2} |\det\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & -2\end{pmatrix}| = 2$

$\text{Area}(T_2) = \frac{1}{2} |\det(P_1 - P_4 | P_3 - P_4)| = \frac{1}{2} |\det\begin{pmatrix}-2 & 2\\ 0 & -2\end{pmatrix}| = 2$

$\text{Area}(T_3) = \frac{1}{2} |\det(P_1 - P_4 | P_2 - P_4)| = \frac{1}{2} |\det\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}| = 1$

$\Rightarrow P_4 = \frac{2}{5} P_1 + \frac{2}{5} P_2 + \frac{1}{5} P_3$

4) $r = P_1 + \langle P_2 - P_1 \rangle = \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} \rangle : \ x - 3y = -4.\ m = \frac{1}{3}.$

$Q_m = \frac{1}{1+m^2}\begin{pmatrix}1-m^2 & 2m\\ 2m & m^2-1\end{pmatrix} \overset{m=\frac{1}{3}}{=} \frac{1}{5}\begin{pmatrix}4 & 3\\ 3 & -4\end{pmatrix}$ $\quad Q = P_1 + Q_{\frac{1}{3}}(P_4 - P_1) = \begin{pmatrix}3/5\\ 11/5\end{pmatrix}$

5) $\text{Area Conv}(P_1, P_2, P_3, P_4, Q) = \text{Area}(T) + \text{Area}(T_3) = 5 + 1 = 6$

7) $\det(v_1, v_2) = 51 \neq 0$. $\quad F_{\mathcal{B}}(v) = \begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}$ dove $x_1 = \frac{\det(v, v_2)}{\det(v_1, v_2)} = \frac{18}{17}$

e $x_2 = \frac{\det(v_1, v)}{\det(v_1, v_2)} = -\frac{29}{17}$

Esercizio 2. *In $\mathbb{R}^3$ consideriamo i tre punti $P_1 = \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$, $P_2 = \begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}$, $P_3 = \begin{pmatrix}4\\1\\2\end{pmatrix}$, i due vettori $v_1 = \overrightarrow{P_1P_2}$ e $v_2 = \overrightarrow{P_1P_3}$ e le due rette $r_1 = P_1 + \langle v_1 + v_2 \rangle$ e $r_2 : \begin{cases} v_1 \cdot X = v_1 \cdot (P_1 + P_2) \\ v_2 \cdot X = v_2 \cdot (P_1 + P_2) \end{cases}$.*

1. *(1 punto) Stabilire la posizione reciproca di r_1 ed r_2, senza cambiare la loro forma.*
2. *(1 punto) Calcolare $v_1 \wedge v_2$.*
3. *(1 punto) Calcolare equazioni parametriche di r_2.*
4. *(1 punto) Calcolare l'area del triangolo T di vertici P_1, P_2 e P_3.*
5. *(1 punto) Calcolare la distanza tra r_1 ed r_2.*
6. *(1 punto) Calcolare equazioni parametriche per la bisettrice del triangolo T nel vertice P_1.*
7. *(1 punto) Date due rette $r = P_1 + \langle v_1 \rangle$ ed $s : AX = b$ di $\mathbb{R}^3$, scrivere le condizioni di incidenza e di parallelismo di r ed s e dedurre una tabella con le quattro possibili posizioni reciproche.*

$v_1 = P_2 - P_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$, $v_2 = P_3 - P_1 = \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$, $P_1 + P_2 = \begin{pmatrix}5\\3\\2\end{pmatrix}$, $v_1 \cdot (P_1+P_2) = 8$, $v_2 \cdot (P_1+P_2) = 12$

1) r_1 ed r_2 sono sghembe. Infatti, $v_1 \cdot (v_1+v_2) = 4 \neq 0 \Rightarrow r_1 \nparallel r_2$.

$\begin{cases} v_1 \cdot (P_1 + t(v_1+v_2)) = 8 \\ v_2 \cdot (P_2 + t(v_1+v_2)) = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4t = 5 \\ 7t = 7 \end{cases}$ non ho soluzione $\Rightarrow r_1 \cap r_2 = \emptyset$

2) $v_1 \wedge v_2 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-1\\-2\end{pmatrix}$.

3) $r_2 = P_1 + P_2 + \langle v_1 \wedge v_2 \rangle = \begin{pmatrix}5\\3\\2\end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix}1\\-1\\-2\end{pmatrix} \right\rangle$

4) $\text{Area}(T) = \frac{1}{2} \| v_1 \wedge v_2 \| = \frac{\sqrt{6}}{2}$

5) $\text{dist}(r_1, r_2) = \text{dist}(P_1 + \langle v_1+v_2 \rangle, P_1 + P_2 + \langle v_1 \wedge v_2 \rangle) = \text{dist}(P_2, \langle v_1+v_2, v_1 \wedge v_2 \rangle)$

$(v_1+v_2) \wedge (v_1 \wedge v_2) = \begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}1\\-1\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\7\\-4\end{pmatrix}$.

$\text{dist}(r_1, r_2) = \left\| pr_{\begin{pmatrix}-1\\7\\-4\end{pmatrix}}(P_2) \right\| = \dfrac{\left| \begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}-1\\7\\-4\end{pmatrix} \right|}{\left\| \begin{pmatrix}-1\\7\\-4\end{pmatrix} \right\|} = \dfrac{|-3+14-4|}{\sqrt{1+49+16}} = \dfrac{7}{\sqrt{66}}$

6) $P_1 + \left\langle \frac{v_1}{\|v_1\|} + \frac{v_2}{\|v_2\|} \right\rangle = \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix} + \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} \right\rangle$.

7)

	$r_1 \equiv r_2$	$r_1 \parallel r_2$	$r_1 \cap r_2 = \{P_0\}$	sghembe
$rg(Av_1)$	0	0	1	1
$rg(Av_1 \mid b - AP_1)$	0	1	1	2

$P_0 = P_1 + t_0 v_1$ dove $t_0(Av_1) = b - AP_1$

Esercizio 3. *Si consideri la seguente matrice*

$$A = \begin{pmatrix} -8 & 24 & 20 \\ -7 & 21 & 16 \\ 6 & -18 & -13 \end{pmatrix}$$

1. *(1 punto) Calcolare il polinomio caratteristico di A.*
2. *(1 punto) Calcolare lo spettro di A.*
3. *(2 punti) Stabilire se A è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$ e nel caso lo sia trovare una matrice invertibile B ed una matrice diagonale D tali che $B^{-1}AB = D$.*
4. *(1 punto) Calcolare A^{2025}.*
5. *(1 punto) Sia $f : V \to V$ un endomorfismo lineare di un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale V. Dare la definizione di autovettore per f.*
6. *(1 punto) Sia A una matrice $n \times n$ a coefficienti in $\mathbb{K}$. Enunciare il criterio di diagonalizzabilità su $\mathbb{K}$ di A.*

1) $P_A(x) = \det\begin{pmatrix} x+8 & -24 & -20 \\ 7 & x-21 & -16 \\ -6 & 18 & x+13 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} x+8 & 3x & -20 \\ 7 & x & -16 \\ -6 & 0 & x+13 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} x+8 & 3x & -20 \\ 1 & x & x-3 \\ -6 & 0 & x+13 \end{pmatrix}$

$= \det\begin{pmatrix} x+5 & 0 & -3x-11 \\ 1 & x & x-3 \\ -6 & 0 & x+13 \end{pmatrix} = x\det\begin{pmatrix} x+5 & -3x-11 \\ -6 & x+13 \end{pmatrix} = x\det\begin{pmatrix} x-1 & -2x+2 \\ -6 & x+13 \end{pmatrix}$

$= x\det\begin{pmatrix} x-1 & 0 \\ -6 & x+1 \end{pmatrix} = x(x-1)(x+1)$. 2) $Sp(A) = \{-1, 0, 1\}$.

3) A ha tre autovalori reali e distinti e quindi è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$.

$V_1(A) = Ker\begin{pmatrix} 9 & -24 & -20 \\ 7 & -20 & -16 \\ -6 & 18 & 14 \end{pmatrix} = \dots = Ker\begin{pmatrix} 1 & 0 & -4/3 \\ 0 & 1 & 1/3 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle$

$V_0(A) = Ker\, A = \dots = Ker\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$.

$V_{-1}(A) = Ker\begin{pmatrix} 7 & -24 & -20 \\ 7 & -22 & -16 \\ -6 & 18 & 12 \end{pmatrix} = \dots = Ker\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

$B = \begin{pmatrix} -4 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. 4) $A^{2025} = BD^{2025}B^{-1} = BDB^{-1} = A$.

5) È un vettore non-nullo $v \in V$ tale che $f(v) \in \langle v \rangle$.

6) $Sp(A) \subset \mathbb{K}$, $ma_A(\lambda) = mg_A(\lambda)$ $\forall \lambda \in Sp(A)$.

Esercizio 4. *Denotiamo $V = \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$. Consideriamo la funzione $f : V \to V$ data da*

$$f(p(x)) = (2x-1)p(x+1) + (x^2-1)p''(x^2+1) + (x+1)p'(x^2-1) - 4xp(x)$$

1. *(1 punto) Calcolare $f(5+4x-x^2)$.*
2. *(1 punto) Dimostrare che f è lineare.*
3. *(1 punto) Calcolare la matrice A associata ad f nella base standard di V.*
4. *(1 punto) Dimostrare che f è invertibile.*
5. *(1 punto) Calcolare $f^{-1}(-30-30x-30x^2)$.*
6. *(1 punto) Sia $W = \mathbb{R}[x]_{\leq 1}$. Dimostrare che $\mathcal{B} = (1+x, 1-x)$ è una base di W e definire la funzione lineare $g : W \to V$ tale che $g(1+x) = 1-2x+x^2$ e $g(1-x) = 2+3x-2x^2$. Calcolare la matrice C associata ad $f \circ g$ nelle basi standard di V e W.*
7. *(1 punto) Siano V e W due $\mathbb{K}$-spazi vettoriali e siano date due applicazioni lineari $f : V \to W$ e $g : W \to V$ tali che f è suriettiva e g è iniettiva. Trovare una condizione che garantisca che $g \circ f$ è un isomorfismo lineare.*

1) $f(5+4x-x^2) = -15x^2$

2) $f = m_{2x-1} \circ Val_{x+1} + m_{x^2-1} \circ Val_{x^2+1} \circ D \circ D + m_{x+1} \circ Val_{x^2-1} \circ D - m_{4x}$

f è quindi combinazione lineare di composizioni di funzioni lineari ed è quindi lineare.

3) $f(1) = 2x-1-4x = -2x-1$; $f(x) = 2x-2x^2$; $f(x^2) = -5-2x+7x^2$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -5 \\ -2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 7 \end{pmatrix}$$

4) $\det A = \det \begin{pmatrix} -1 & 0 & -5 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & 5 \end{pmatrix} = 2 \det \begin{pmatrix} -1 & -5 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} = 10 \det \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = -30 \neq 0$

$\Rightarrow f$ invertibile

5) $A^{-1} = -\frac{1}{30} \begin{pmatrix} 10 & 10 & 10 \\ 14 & -7 & 8 \\ 4 & -2 & -2 \end{pmatrix}$. $A^{-1} \begin{pmatrix} -30 \\ -30 \\ -30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 10 & 10 \\ 14 & -7 & 8 \\ 4 & -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 \\ 15 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow f^{-1}(-30-30x-30x^2) = 30+15x$.

6) $1-x \notin \langle 1+x \rangle \Rightarrow \mathcal{B}$ è base di W, $C = ADB^{-1} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -14 & 14 \\ 2 & 14 \\ 9 & -31 \end{pmatrix}$, dove

$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$.

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, equal] \arrow[d, "F_e"] & W \arrow[r, "g"] \arrow[d, "F_{\mathcal{B}}"] & V \arrow[r] \arrow[d, "F_e"] & V \arrow[d, "F_c"] \\ \mathbb{R}^2 & \mathbb{R}^2 \arrow[l, "B"'] \arrow[r, "D"] & \mathbb{R}^3 \arrow[r, "A"] & \mathbb{R}^3 \end{tikzcd}$$

7) $\dim V = \dim W$.

Esercizio 5. *Si consideri il vettore* $v = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$, *la matrice* $A = vv^t$ *ed il punto* $Q = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$

1. *(1 punto) Calcolare* A.
2. *(1 punto) Trovare una base per* $Col(A)$ *e calcolare il rango di* A.
3. *(1 punto) Calcolare una base* $\mathcal{B}_{Ker(A)}$ *del nucleo di* A.
4. *(1 punto) Dimostrare che* A *è ortogonalmente diagonalizzabile.*
5. *(1 punto) Trovare una matrice ortogonale* B *ed una matrice diagonale* D *tali che* $B^tAB = D$.
6. *(1 punto) Calcolare la proiezione ortogonale di* Q *sulla retta generata da* v *e la distanza di* Q *dall'iperpiano* $\pi = v^\perp$.
7. *(1 punto) Sia* A *una matrice di taglia* 5×7. *E' possibile che* A^tA *sia invertibile? Perché?*

1) $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. 2) $Col\,A = \langle v \rangle$. $rg\,A = 1$. $\mathcal{B}_{ColA} = (v)$.

3) $Ker\,A = v^\perp : -2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$. $\mathcal{B}_{KerA} = \left(v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$.

4) $A^t = (vv^t)^t = (v^t)^t v^t = vv^t = A$. Per il teorema spettrale A è ort. diag.

5) $F_1 = v_1$, $F_1 \cdot F_1 = 5$. $F_2' = v_2 - \frac{v_2 \cdot F_1}{F_1 \cdot F_1} F_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/5 \\ -2/5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

$F_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix}$, $F_2 \cdot F_2 = 120$. $F_3' = v_3 - \frac{v_3 \cdot F_1}{F_1 \cdot F_1} F_1 - \frac{v_3 \cdot F_2}{F_2 \cdot F_2} F_2 = v_3 - \frac{1}{5} F_1 - \frac{4}{120} F_2 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix}$

$F_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix}$, $F_3 \cdot F_3 = 42$

$B = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{30} & 2/\sqrt{42} & -2/\sqrt{7} \\ 2/\sqrt{5} & -1/\sqrt{30} & -1/\sqrt{42} & 1/\sqrt{7} \\ 0 & 5/\sqrt{30} & -1/\sqrt{42} & 1/\sqrt{7} \\ 0 & 0 & 6/\sqrt{42} & 1/\sqrt{7} \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$

6) $pr_v(Q) = \frac{Q \cdot v}{v \cdot v} v = \frac{3}{7} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. $dist(Q, \pi) = \| pr_v(Q) \| = \frac{3}{7}\sqrt{7}$

7) No, non è possibile. Infatti A^tA ha taglia 7×7. Se fosse invertibile, $rg\,A^tA = 7$. Ma $rg\,A^tA = rg\,A \leq 5$.