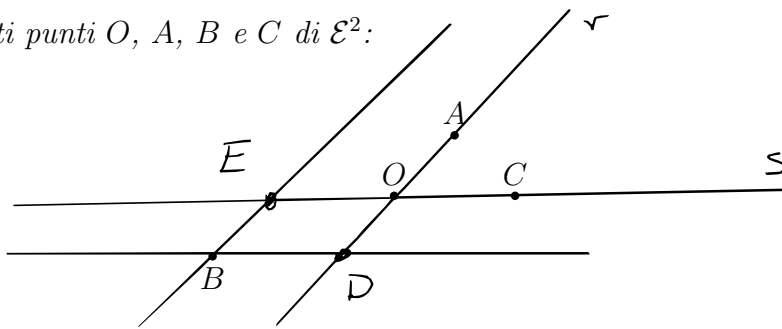


Esame scritto di Geometria.
Ingegneria Chimica.
Secondo appello a.a. 2025/26.
Docente: Giovanni Cerulli Irelli.

3 febbraio 2026

Esercizio 1. In (\mathbb{R}^2, \cdot) consideriamo i vettori $v_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ e $v_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ ed il punto $P = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$. Consideriamo anche le due rette $r_1 = P + \langle v_1 \rangle$ e $r_2 = P + \langle v_2 \rangle$.

1. Calcolare $\cos \widehat{v_1 v_2}$.
2. Calcolare $F_B(P)$, dove $B = (v_1, v_2)$
3. Calcolare $P_1 = \text{pr}_{v_1}^{v_2}(\overrightarrow{OP})$ e $P_2 = \text{pr}_{v_2}^{v_1}(\overrightarrow{OP})$.
4. Calcolare l'equazione cartesiana della retta r_1 .
5. Calcolare equazioni parametriche e cartesiane della circonferenza C passante per P e per le punte di v_1 e di v_2 .
6. Calcolare il punto Q ottenuto ruotando il punto P attorno all'origine di un angolo di 60° in senso orario.
7. Consideriamo i seguenti punti O, A, B e C di \mathcal{E}^2 :



Disegnare le due rette $r = r_{OA}$ e $s = r_{OC}$ ed i due punti D ed E tali che $\overrightarrow{OD} = \text{pr}_r^s(\overrightarrow{OB})$ e $\overrightarrow{OE} = \text{pr}_s^r(\overrightarrow{OA})$.

Sol: 1) $\cos \widehat{v_1 v_2} = \frac{v_1 \cdot v_2}{\|v_1\| \|v_2\|} = \frac{9}{\sqrt{13} \sqrt{10}} > 0$ (acuto). 2) $F_B(P) = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$. Injekt,

$P = x_1 v_1 + x_2 v_2$ con $x_1 = \frac{\det(P, v_2)}{\det(v_1, v_2)} = \frac{7}{7}$, $x_2 = \frac{\det(v_1, P)}{\det(v_1, v_2)} = \frac{-14}{7}$.

3) $P_1 = x_1 v_1 = v_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $P_2 = x_2 v_2 = -2 v_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix}$

4) $r_1: 3x + 2y = 14$. 5) C è la circonferenza circoscritta al triangolo Pv_1v_2 .

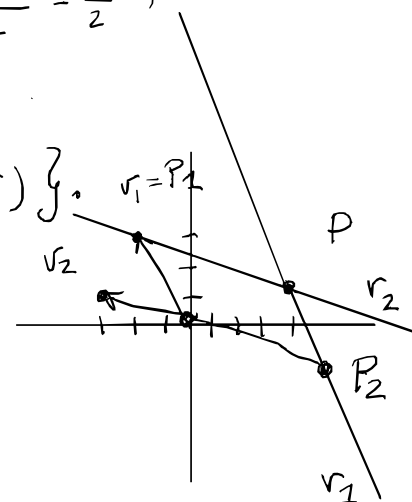
Linee di $Pv_1: 6x - 2y = \frac{17 - 4 - 9}{2} = 2$, linee di $Pv_2: 7x = \frac{17 - 9 - 1}{2} = \frac{7}{2}$,

$C: \begin{cases} 3x - y = 1 \\ x = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow C = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$. raggio = $\|P - C\| = \left\| \begin{pmatrix} 7/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} \right\| = \frac{\sqrt{50}}{2}$.

$C: (x - \frac{1}{2})^2 + (y - \frac{1}{2})^2 = \frac{25}{2}$, $C = \left\{ \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} + \frac{\sqrt{50}}{2} \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} \mid \forall \theta \in [0, 2\pi) \right\}$.

6) $Q = R_{-60^\circ} P$ $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ $R_{-60^\circ} = \begin{pmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}$

$Q = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 + \sqrt{3} \\ 1 - 4\sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 + \sqrt{3}/2 \\ \frac{1}{2} - 2\sqrt{3} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2,8 \\ -2,9 \end{pmatrix}$



Esercizio 2. In \mathbb{R}^3 consideriamo le due rette

$$r: \begin{cases} x+y-z = -1 \\ x+2y+z = -2 \end{cases} \quad s: \begin{cases} x-y+z = 1 \\ x+2y-2z = 1 \end{cases}$$

- (1 punto) Stabilire la posizione reciproca di r ed s senza cambiare la loro forma.
- (1 punto) Usare il prodotto vettoriale per trovare un vettore direttore v di r e w di s .
- (1 punto) Calcolare equazioni parametriche di r e di s .
- (1 punto) Trovare equazioni cartesiane del piano π passante per r e parallelo ad s .
- (1 punto) Calcolare la distanza tra s e π .
- (1 punto) Dimostrare la seguente formula: data una retta $s = P_0 + \langle w \rangle$ ed un punto $P \in \mathbb{R}^3$, allora

$$\text{dist}(P, s) = \frac{\|(P - P_0) \wedge w\|}{\|w\|}$$

- (1 punto) Usare la formula precedente per trovare l'equazione del cilindro H di asse s e tangente a π .

Sol.: 1) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & -2 \\ \hline 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ \hline 0 & -2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ \hline 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow \text{sono sghembe.}$

2) $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $w = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$

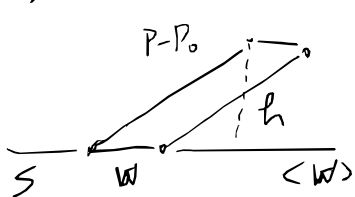
3) $r = -e_2 + \langle v \rangle$, $s = e_1 + \langle w \rangle$

4) $\pi: v \wedge w \cdot X = v \wedge w \cdot (-e_2)$ $v \wedge w = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} = 9 \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\pi: x+y-z = -1$

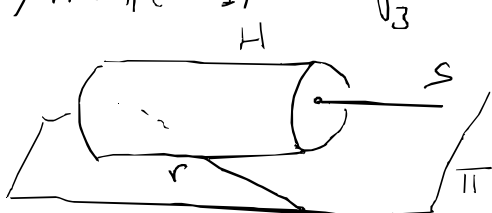
5) s e π sono paralleli. $\text{dist}(\pi, s) = \text{dist}(\pi, e_1) = \frac{|1+2|}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$

6) $\text{dist}(P, s) = \text{dist}(P-P_0, \langle w \rangle) = h$



$\left. \begin{array}{l} \text{Area}(\mathcal{P}(P-P_0, w)) = \|w\| h \\ \text{Area}(\mathcal{P}(P-P_0, w)) = \|(P-P_0) \wedge w\| \end{array} \right\} \Rightarrow h = \frac{\|(P-P_0) \wedge w\|}{\|w\|}$

7) $H: \|(X-e_1) \wedge w\| = \frac{2}{\sqrt{3}} \|w\| \Leftrightarrow \|(X-e_1) \wedge w\|^2 = \frac{4}{3} \|w\|^2 = \frac{8}{3}$



$\begin{pmatrix} x_1-1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2-x_3 \\ 1-x_1 \\ x_1-1 \end{pmatrix} \quad H: 2(x_1-1)^2 + (x_2-x_3)^2 = \frac{8}{3}$

Esercizio 3. Si consideri la seguente matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 & -3 \\ 2 & -4 & 5 & -3 \\ -1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -6 & 3 \end{pmatrix}$$

1. (1 punto) Calcolare il polinomio caratteristico di A .
2. (1 punto) Calcolare il determinante di A .
3. (1 punto) Calcolare lo spettro di A .
4. (1 punto) Trovare una base dell' autospazio di autovalore -1 .
5. (1 punto) Stabilire se A è diagonalizzabile su \mathbb{R} .
6. (1 punto) Sia $f : V \rightarrow V$ un endomorfismo lineare di un \mathbb{K} -spazio vettoriale V . Che cosa vuol dire che f è diagonalizzabile?
7. (1 punto) E' vero che ogni endomorfismo lineare di uno spazio vettoriale reale è diagonalizzabile? E se lo spazio vettoriale è complesso? (Se è vero dimostrarlo, altrimenti fornire un controesempio.)

Sol: 1) $P_A(x) = \det \begin{pmatrix} x-1 & 3 & -5 & 3 \\ -2 & x+4 & -5 & 3 \\ 1 & -2 & x+2 & -1 \\ 0 & -2 & 6 & x-3 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} x+1 & -x-1 & 0 & 0 \\ -2 & x+4 & -5 & 3 \\ 1 & -2 & x+2 & -1 \\ 0 & -2 & 6 & x-3 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} x+1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & x+2 & -5 & 3 \\ 1 & -1 & x+2 & -1 \\ 0 & -2 & 6 & x-3 \end{pmatrix}$

$$= (x+1) \det \begin{pmatrix} x+2 & -5 & 3 \\ -1 & x+2 & -1 \\ -2 & 6 & x-3 \end{pmatrix} = (x+1) \det \begin{pmatrix} x-1 & -5 & 3 \\ 0 & x+2 & -1 \\ -x+1 & 6 & x-3 \end{pmatrix} = (x+1) \det \begin{pmatrix} x-1 & -5 & 3 \\ 0 & x+2 & -1 \\ 0 & 1 & x \end{pmatrix} = (x+1)^3 (x-1)$$

2) $\det A = P_A(0) = -1$. 3) $Sp(A) = \{1, -1\}$.

4) $V_{-1}(A) = \text{Ker} \begin{pmatrix} -2 & 3 & -5 & 3 \\ -2 & 3 & -5 & 3 \\ 1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 6 & -4 \end{pmatrix} = \dots = \text{Ker} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$, $\beta_{V_{-1}(A)} = \left(\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$.

5) A non è diagonalizzabile. Infatti, $m_{A,-1} = 3 > 1 = m_{p_A}(-1)$.

6) Vuol dire che esiste una base di V composta di autovettori per f .

7) No, non è vero né sui reali né sui complessi. Ad esempio: il blocco di Jordan $n \times n$ di autovalore λ e matrice $n \times n$ non è diagonalizzabile se $n > 1$, né su \mathbb{R} né su \mathbb{C} .

Esercizio 4. Consideriamo i seguenti insiemi

$$\mathcal{B}_1 = \left(v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right) \subset \mathbb{R}^2, \quad \mathcal{B}_2 = \left(w_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, w_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \subset \mathbb{R}^3$$

- (1 punto) Dimostrare che \mathcal{B}_1 è una base di \mathbb{R}^2 e che \mathcal{B}_2 è una base di \mathbb{R}^3 .
- (1 punto) Sia $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la funzione lineare tale che $f(v_1) = w_1 - w_2 + w_3$ e $f(v_2) = w_1 + w_3$. Calcolare la matrice F associata a f nelle basi \mathcal{B}_1 e \mathcal{B}_2 .
- (1 punto) Sia $g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ la funzione definita come segue:

$$g\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = (-4x - 3y + 2z)v_1 + (3x + 2y - 2z)v_2$$

Dimostrare che g è lineare.

- (1 punto) Calcolare la matrice G associata a g nelle basi standard $\mathcal{C}_3 = (e_1, e_2, e_3)$ e $\mathcal{C}_2 = (e_1, e_2)$.
- (1 punto) Calcolare la matrice A associata a $f \circ g$ nella base standard \mathcal{C}_2 .
- (1 punto) Stabilire se $f \circ g$ è invertibile e nel caso lo sia calcolare la sua inversa; altrimenti trovare una base per il suo nucleo e per la sua immagine.
- (1 punto) Calcolare l'inversa della matrice $B_2 = (w_1|w_2|w_3)$.

Sol: 1) $\det B_1 = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = 1 \neq 0$, $\det B_2 = \det \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 1 \neq 0$.

2) $F = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ 3) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall X, Y \in \mathbb{R}^3$,

$$\begin{aligned} g(\alpha X + \beta Y) &= [-4(\alpha x_1 + \beta y_1) - 3(\alpha x_2 + \beta y_2) + 2(\alpha x_3 + \beta y_3)]v_1 + [3(\alpha x_1 + \beta y_1) + 2(\alpha x_2 + \beta y_2) - 2(\alpha x_3 + \beta y_3)]v_2 = \\ &= \alpha [(-4x_1 - 3x_2 + 2x_3)v_1 + (3x_1 + 2x_2 - 2x_3)v_2] + \beta [(-4y_1 - 3y_2 + 2y_3)v_1 + (3y_1 + 2y_2 - 2y_3)v_2] = \\ &= \alpha g(X) + \beta g(Y). \end{aligned}$$

4) $g(e_1) = -4v_1 + 3v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$; $g(e_2) = -3v_1 + 2v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $g(e_3) = 2v_1 - 2v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$.

$\Rightarrow G = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

5) $\mathbb{R}^3 \xrightarrow{g} \mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^2 \xrightarrow{f} \mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^3$ $A = B_2 F B_1^{-1} G = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -2 \\ -2 & -2 & 0 \\ 3 & 2 & -2 \end{pmatrix}$

$\downarrow F_e$ $\downarrow F_e$ $\downarrow F_{B_1}$ $\downarrow F_{B_2}$ $\downarrow F_e$
 $\mathbb{R}^3 \xrightarrow{G} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{F} \mathbb{R}^3 \xrightarrow{B_2} \mathbb{R}^3$

6) $A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Ker } f \circ g = \text{Ker } A = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$, $\text{Im } f \circ g = \text{Col } A = \left\langle \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$

7) $B_2^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ (rower)

Esercizio 5. In \mathbb{R}^4 , consideriamo:

$$U: \begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_4 = 0 \end{cases}, \quad W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle, \quad P = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

- (1 punto) Calcolare una base \mathcal{B}_U di U .
- (2 punti) Calcolare la matrice P_U di proiezione ortogonale su U .
- (1 punto) Calcolare la distanza di P da U .
- (2 punti) Calcolare la dimensione di $U \cap W$ e la dimensione di $U + W$.
- (1 punto) Trovare una base ortogonale di $U + W$ e calcolare la proiezione ortogonale di Q su $U + W$ utilizzando i coefficienti di Fourier.

Sol.: 1) $\mathcal{B}_U = \left(v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

$$U = \text{Ker} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \text{Ker} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & -6 & -3 \end{pmatrix} = \text{Ker} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} = \text{Ker} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$2) A = (v_1 v_2) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P_U = A(A^t A)^{-1} A^t = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$3) \text{dist}(P, U) = \|P - P_U P\| = \left\| \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = 4\sqrt{2}$$

$$4) \begin{cases} (s+t) - (2s+3t) + 3(-s-t) + (s+2t) = 0 \\ 2(s+t) + (2s+3t) - (s+2t) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow s+t=0 \Rightarrow U \cap W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = v_2 \right\rangle$$

$$\Rightarrow \dim U \cap W = 1. \quad \dim U + W \stackrel{\text{GRASSMANN}}{=} \dim U + \dim W - \dim U \cap W = 3$$

$$5) \mathcal{B}_{U+W} = \left(v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right). \quad F_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad F_2 = v_1 - \frac{v_1 \cdot v_2}{v_2 \cdot v_2} v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

$$F_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{3}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}. \quad F_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

$$P_{U+W}(Q) = \frac{Q \cdot F_1}{F_1 \cdot F_1} F_1 + \frac{Q \cdot F_2}{F_2 \cdot F_2} F_2 + \frac{Q \cdot F_3}{F_3 \cdot F_3} F_3 = 3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$