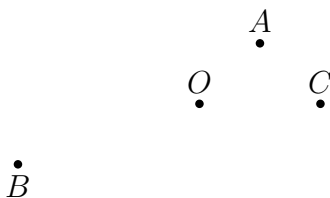


Esame scritto di Geometria.  
Ingegneria Chimica.  
Secondo appello a.a. 2025/26.  
Docente: Giovanni Cerulli Irelli.

3 febbraio 2026

**Esercizio 1.** In  $(\mathbb{R}^2, \cdot)$  consideriamo i vettori  $v_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$  e  $v_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$  ed il punto  $P = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ . Consideriamo anche le due rette  $r_1 = P + \langle v_1 \rangle$  e  $r_2 = P + \langle v_2 \rangle$ .

1. Calcolare  $\cos \widehat{v_1 v_2}$ .
2. Calcolare  $F_B(P)$ .
3. Calcolare  $P_1 = \text{pr}_{v_1}^{v_2}(\overrightarrow{OP})$  e  $P_2 = \text{pr}_{v_2}^{v_1}(\overrightarrow{OP})$ .
4. Calcolare l'equazione cartesiana della retta  $r_1$ .
5. Calcolare equazioni parametriche e cartesiane della circonferenza  $\mathcal{C}$  passante per  $P$  e per le punte di  $v_1$  e di  $v_2$ .
6. Calcolare il punto  $Q$  ottenuto ruotando il punto  $P$  attorno all'origine di un angolo di  $60^\circ$  in senso orario.
7. Consideriamo i seguenti punti  $O, A, B$  e  $C$  di  $\mathcal{E}^2$ :



Disegnare le due rette  $r = r_{OA}$  e  $s = r_{OC}$  ed i due punti  $D$  ed  $E$  tali che  $\overrightarrow{OD} = \text{pr}_r^s(\overrightarrow{OB})$  e  $\overrightarrow{OE} = \text{pr}_s^r(\overrightarrow{OB})$ .

**Esercizio 2.** In  $\mathbb{R}^3$  consideriamo le due rette

$$r : \begin{cases} x + y - z = -1 \\ x + 2y + z = -2 \end{cases} \quad s : \begin{cases} x - y + z = 1 \\ x + 2y - 2z = 1 \end{cases}$$

1. (1 punto) Stabilire la posizione reciproca di  $r$  ed  $s$  senza cambiare la loro forma.
2. (1 punto) Usare il prodotto vettoriale per trovare un vettore direttore  $v$  di  $r$  e  $w$  di  $s$ .
3. (1 punto) Calcolare equazioni parametriche di  $r$  e di  $s$ .
4. (1 punto) Trovare equazioni cartesiane del piano  $\pi$  passante per  $r$  e parallelo ad  $s$ .
5. (1 punto) Calcolare la distanza tra  $s$  e  $\pi$ .
6. (1 punto) Dimostrare la seguente formula: data una retta  $s = P_0 + \langle w \rangle$  ed un punto  $P \in \mathbb{R}^3$ , allora

$$\text{dist}(P, s) = \frac{\|(P - P_0) \wedge w\|}{\|w\|}$$

7. (1 punto) Usare la formula precedente per trovare l'equazione del cilindro  $H$  di asse  $s$  e tangente al piano  $\pi$ .

**Esercizio 3.** *Si consideri la seguente matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 & -3 \\ 2 & -4 & 5 & -3 \\ -1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -6 & 3 \end{pmatrix}$$

1. (1 punto) *Calcolare il polinomio caratteristico di  $A$ .*
2. (1 punto) *Calcolare il determinante di  $A$ .*
3. (1 punto) *Calcolare lo spettro di  $A$ .*
4. (1 punto) *Trovare una base dell' autospazio di autovalore  $-1$ .*
5. (1 punto) *Stabilire se  $A$  è diagonalizzabile su  $\mathbb{R}$ .*
6. (1 punto) *Sia  $f : V \rightarrow V$  un endomorfismo lineare di un  $\mathbb{K}$ -spazio vettoriale  $V$ . Che cosa vuol dire che  $f$  è diagonalizzabile?*
7. (1 punto) *E' vero che ogni endomorfismo lineare di uno spazio vettoriale reale è diagonalizzabile? E se lo spazio vettoriale è complesso? (Se è vero dimostrarlo, altrimenti fornire un controesempio.)*

**Esercizio 4.** Consideriamo i seguenti insiemi

$$\mathcal{B}_1 = \left( v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right) \subset \mathbb{R}^2, \quad \mathcal{B}_2 = \left( w_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, w_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \subset \mathbb{R}^3$$

- (1 punto) Dimostrare che  $\mathcal{B}_1$  è una base di  $\mathbb{R}^2$  e che  $\mathcal{B}_2$  è una base di  $\mathbb{R}^3$ .
- (1 punto) Sia  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  la funzione lineare tale che  $f(v_1) = w_1 - w_2 + w_3$  e  $f(v_2) = w_1 + w_3$ . Calcolare la matrice  $F$  associata a  $f$  nelle basi  $\mathcal{B}_1$  e  $\mathcal{B}_2$ .
- (1 punto) Sia  $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  la funzione definita come segue:

$$g\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = (-4x - 3y + 2z)v_1 + (3x + 2y - 2z)v_2$$

Dimostrare che  $g$  è lineare.

- (1 punto) Calcolare la matrice  $G$  associata a  $g$  nelle basi standard  $\mathcal{C}_3 = (e_1, e_2, e_3)$  e  $\mathcal{C}_2 = (e_1, e_2)$ .
- (1 punto) Calcolare la matrice  $A$  associata a  $f \circ g$  nella base standard  $\mathcal{C}_2$ .
- (1 punto) Stabilire se  $f \circ g$  è invertibile e nel caso lo sia calcolare la sua inversa; altrimenti trovare una base per il suo nucleo e per la sua immagine.
- (1 punto) Calcolare l'inversa della matrice  $B_2 = (w_1|w_2|w_3)$ .

**Esercizio 5.** In  $\mathbb{R}^4$ , consideriamo:

$$U : \begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_4 = 0 \end{cases}, \quad W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle, \quad P = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

1. (1 punto) Calcolare una base  $\mathcal{B}_U$  di  $U$ .
2. (2 punti) Calcolare la matrice  $P_U$  di proiezione ortogonale su  $U$ .
3. (1 punto) Calcolare la distanza di  $P$  da  $U$ .
4. (2 punti) Calcolare la dimensione di  $U \cap W$  e la dimensione di  $U + W$ .
5. (1 punto) Trovare una base ortogonale di  $U + W$  e calcolare la proiezione ortogonale di  $Q$  su  $U + W$  utilizzando i coefficienti di Fourier.