Sia $AX=b$ un sistema

di m equazioni in n incognite.

Come si ottengono le soluzioni, nel caso esistano?

L'idea è di trovare un altro sistema che abbia le stesse soluzioni (che potrebbero anche non esistere) del sistema dato, ma che sia facilmente risolubile:

i sistemi di più facile risoluzione sono i <u>sistemi a scala con righe ridotte</u> che andremo adesso a studiare.

Dimostreremo che ogni sistema è equivalente a (ovvero ha le stesse soluzioni di) un sistema a scala con righe ridotte.

Def: Due sistemi lineari $AX=b$ e $UX=c$ si dicono equivalenti se hanno le stesse soluzioni.

Es:

•) $\begin{cases} x+y=1 \\ 2x+2y=2 \end{cases}$ è equivalente a $x+y=1$

•) $\begin{cases} x+y=1 \\ x-y=2 \end{cases}$ è equivalente a $\begin{cases} x=3/2 \\ y=-1/2 \end{cases}$

•) $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=1 \\ x_1-x_2+x_3=2 \end{cases}$ è equivalente a $\begin{cases} x_1=3/2-x_3 \\ x_2=-1/2 \end{cases}$

Cerchiamo delle operazioni elementari da effettuare su un sistema in modo che le soluzioni non cambino.

(E1) <u>Scambio di due equazioni</u>: se scambiamo l'ordine in cui abbiamo scritto le equazioni le soluzioni ovviamente non cambiano

<u>Es</u>: $\begin{cases} x+2y=1 \\ 2x-y=2 \end{cases}$ è equivalente a $\begin{cases} 2x-y=2 \\ x+2y=1 \end{cases}$

(E2) <u>Moltiplicazione di un'equazione per un numero non nullo</u>

<u>Es</u>: $x+y=1$ è equivalente a $2x+2y=2$

(E3) Sommare ad un'equazione un'altra equazione

Date due equazioni

$$\text{eqn } 1: \quad p(x_1, \dots, x_n) = b$$

$$\text{eqn } 2: \quad q(x_1, \dots, x_n) = c$$

del nostro sistema, se al posto dell'equazione 1 scriviamo l'equazione

$$\text{eqn } 1': \quad (p+q)(x_1, \dots, x_n) = b+c$$

otteniamo un sistema equivalente.

Infatti se X è soluzione di

$$p(X) = b \quad \text{e di} \quad q(X) = c$$

allora

$$(p+q)(X) = p(X) + q(X) = c.$$

Viceversa se

$$(p+q)(X) = b+c \quad \text{e} \quad q(X) = c$$

allora

$$p(X) = p(X) + q(X) - q(X) = b+c-c = b.$$

Queste sono operazioni che possono essere effettuate sulla matrice completa del sistema.
Riformuliamole per le matrici:

<u>Operazioni elementari sulle righe</u> di una matrice A

(R1) Scambio di due righe ("$R_i \leftrightarrow R_j$")

(R2) Moltiplicazione di una riga per uno scalare λ non nullo
("$R_i \mapsto \lambda R_i$")

(R3) Sostituzione di una riga A_i con una riga ottenuta sommando ad A_i un'altra riga A_j di A
("$R_i \mapsto R_i + R_j$")

Def: Due matrici $A, B \in Mat_{m\times n}$ (della stessa taglia) si dicono equivalenti per righe se B è ottenuta da A mediante (ripetute) applicazioni delle operazioni elementari (R1), (R2), (R3).

In questo caso scriviamo

$$A \underset{R}{\rightsquigarrow} B .$$

OSS: 1) $A \underset{R}{\rightsquigarrow} A$

2) $A \underset{R}{\rightsquigarrow} B \Rightarrow B \underset{R}{\rightsquigarrow} A$

Infatti, le operazioni elementari sono invertibili:

Se $B_j = \lambda A_j$ $(\lambda \neq 0)$ allora $A_j = \lambda^{-1} B_j$

Se $B_i = A_i + A_j$ allora $A_i = B_i - B_j$
$(A_j = B_j)$

$\cdot)\ A \underset{R}{\rightsquigarrow} B \underset{R}{\rightsquigarrow} C \Rightarrow A \underset{R}{\rightsquigarrow} C$

Quindi $\underset{R}{\rightsquigarrow}$ è una relazione di equivalenza.

<u>OSS</u>: Possiamo combinare insieme (R2) e (R3):

"$R_i \longmapsto R_i + \lambda R_j$"

<u>Es</u>: Effettuiamo operazioni elementari:

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xmapsto[R_1 \mapsto R_1 - R_2]{} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xmapsto[\substack{R_2 \mapsto R_2 - 2R_1 \\ R_3 \mapsto R_3 - R_1}]{} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 3 \\ 0 & -7 & -7 & -6 \\ 0 & -5 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\xmapsto[R_2 \mapsto -\frac{1}{7} R_2]{} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 6/7 \\ 0 & -5 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\xmapsto[R_3 \mapsto R_3 + 5R_2]{} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 6/7 \\ 0 & 0 & 3 & \frac{30}{7} - 2 = \frac{16}{7} \end{pmatrix}$$

4

<u>Prop.</u>: Se due sistemi $AX=b$ e $UX=c$ hanno matrici complete

$$(A|b) \underset{R}{\leadsto} (U|c)$$

equivalenti per righe, allora essi sono equivalenti.

<u>dim</u>: Le operazioni elementari effettuate sulle righe della matrice completa di un sistema, corrispondono ad effettuare le operazioni elementari (E1), (E2), (E3) sul sistema.

Abbiamo già osservato che queste operazioni non cambiano le soluzioni del sistema.

$\boxtimes$

Abbiamo già osservato che i sistemi a scala (risolubili) si risolvono con "la sostituzione all'indietro" e tra di essi ci sono i sistemi a scala ridotti che si risolvono immediatamente.

Il seguente Teorema ci dice che ogni sistema è equivalente ad un sistema a scala con righe ridotte.
In particolare, questo ci permette di stabilire se il sistema è risolubile o meno e nel caso lo sia ci permette di trovare tutte le soluzioni.

Teorema fondamentale sulla riduzione a scala

Ogni matrice $A \in Mat_{m\times n}$ è equivalente per righe ad una matrice a scala con righe ridotte. Inoltre, tale matrice è <u>unica</u>, si chiama <u>la forma a scala ridotta</u> di A e si denota con $rref(A)$.

<u>NB</u>: rref sta per <u>R</u>ow <u>R</u>educed <u>E</u>chelon <u>F</u>orm

<u>Comando Matlab</u>: rref(A).

Suggerimento: conviene definire A come matrice simbolica

A=sym([---])

per evitare approssimazioni.

dim:

Se $A = O_{m\times n}$ allora A è a scala con righe ridotte. In tal caso A è equivalente per righe solo a se stessa, dato che le operazioni elementari non permettono di trasformare righe nulle in righe non-nulle.

Supponiamo quindi che $A \neq O_{m\times n}$.

Sia R una riga di A non-nulla e tale che alla sinistra del suo pivot non ci siano altri pivot.

Es: $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad R = A_2$ oppure $R = A_3$.

(In altre parole il pivot di R appartiene alla prima colonna non-nulla di A).

① Scambiamo R con A_1: otteniamo una matrice B. Sia p_1 il pivot di B_1.

Es: Scegliamo $R = A_2$. Otteniamo

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad P_1 = 2$$

Sia $j(1)$ la colonna contenente P_1.

Es: $j(1) = 2$.

② <u>Creiamo degli zeri sotto a P_1</u>:

Per ogni $i = 2, 3, \dots, m$ sostituiamo la riga B_i con la nuova riga

$$B_i - \frac{b_{ij(1)}}{P_1} B_1$$

Es:
$$B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \mapsto R_3 - \frac{1}{2} R_1]{} C = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Otteniamo così una nuova matrice C t.c. $C^{j(1)} = \begin{pmatrix} P_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.

$$C = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & \cdots & 0 \; p_1 & * & \cdots & * \\ \hline 0 & & 0 & & & \\ \vdots & & \vdots & & A' & \\ 0 & \cdots & 0 & & & \end{array}\right) \underset{R}{\sim} A$$

Ripetiamo i passi 1 e 2 partendo dalla matrice A'. Continuando in questo modo, dopo al più m passi, otteniamo una matrice a scala

$$U = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \; p_1 & * & \cdots & \cdots & \cdots & * \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \; p_2 & * & \cdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \; p_3 & * & \cdots & * \\ \vdots & & & & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & p_r & * & * \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

equivalente per righe ad A.

Es (continua):

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \mapsto R_3 + \frac{1}{2} R_1]{} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = U$$

A'

Per ottenere da una matrice a scala U, una matrice a scala con righe ridotte U_0 procediamo come segue:

③ Dividiamo ogni riga non-nulla di U per il suo pivot.
Otteniamo una matrice U' che ha 1-dominanti (ovvero pivot $=1$)

Es:

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow U' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

④ "Utilizziamo gli 1-dominanti per ripulire le colonne sopra di loro":

Ovvero, siano $U'_1, \dots, U'_r$ le righe non-nulle di U' e siano $j(1), \dots, j(r)$ gli indici delle colonne dominanti.

Per prima cosa "ripuliamo" l'ultima colonna $j(r)$:

Per $1 \leq i \leq r-1$: $\boxed{U'_i \longmapsto U'_i - u'_{ij(r)} U_r}$

Otteniamo una matrice $U^{(r-1)}$

Es:

$$\begin{array}{c} U' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{cccccc} & j(1) & & j(2) & j(3) & \end{array} \end{array} \xrightarrow[\substack{R_1 \mapsto R_1 - 4R_3 \\ R_2 \mapsto R_2 - 3R_3}]{} U^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & -15 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Poi ripuliamo la colonna $j(r-1)$:

Per $i : 1 \leq i \leq r-2$

$$U_i^{(r-1)} \longmapsto U_i^{(r-1)} - u^{(r-1)}_{ij(r-1)} U^{(r-1)}_{j(r-1)}$$

Otteniamo una matrice $U^{(r-2)}$.

Es:

$$U^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & -15 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} \underset{R_1 \mapsto R_1 - 3R_2}{\rightsquigarrow} U^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Dopo $r-1$ passi otteniamo la matrice $U^{(1)}$ che è a scala ridotta.

Facciamo vedere che è unica.

Supponiamo che

$$A \underset{R}{\sim} U_0 \quad e \quad A \underset{R}{\sim} V_0$$

con U_0 e V_0 a scala ridotte.

Allora $U_0 \underset{R}{\sim} V_0$, per la proprietà transitiva di $\underset{R}{\sim}$.

Dimostriamo che $U_0 = V_0$.

Supponiamo, per assurdo, che

$$U_0 \neq V_0.$$

Sia j il primo indice di colonna t.c. $U_0^j \neq V_0^j$.

Discutiamo, per prima cosa, il caso in cui $j=1$, ovvero in cui U_0 e V_0 differiscono già nella prima colonna: La prima colonna di una matrice a scala ridotta è zero oppure $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.

Dato che $A \underset{R}{\rightsquigarrow} U_0$, la prima colonna di U_0 è zero se e solo se la prima colonna di A è zero.

Similmente, $V_0^1 = 0 \iff A^1 = 0$.

Ne segue che

$$U_0^1 = 0 \iff A^1 = 0 \iff V_0^1 = 0$$

e quindi la prima colonna di U_0 è necessariamente uguale alla prima colonna di V_0.

Sia quindi $j>1$.

$$U_0=\left[\begin{array}{c|cccc} & * & \cdots & & * \\ B & * & & & \vdots \\ & \vdots & & & \vdots \\ & * & & & * \end{array}\right], \quad V_0=\left[\begin{array}{c|cccc} & * & & & * \\ B & \vdots & & & \\ & \vdots & & & \\ & * & \cdots & & * \end{array}\right]$$
$$\begin{array}{c} \uparrow \\ j \end{array} \qquad\qquad\qquad\qquad \begin{array}{c} \uparrow \\ j \end{array}$$

Siano $1\leq j(1)<\ldots<j(k)<j$

le colonne dominanti che precedono la colonna j-esima.

Consideriamo la matrice $\overline{U}_0\in Mat_{m\times(k+1)}$ che ha come colonne le colonne $j(1),..,j(k),j$ di U_0

e consideriamo la matrice $\overline{V}_0\in Mat_{m\times(k+1)}$ che ha come colonne le colonne $j(1),..,j(k),j$ di V_0. Quindi

$$\overline{U}_0=\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & & & & * \\ & 1 & & & \vdots \\ & & \ddots & & \vdots \\ & & & 1 & * \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \vdots \\ \vdots & & & \vdots & * \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \end{array}\right), \quad \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & & k & V_0^j \\ & & & & \downarrow \end{array} \overline{V}_0=\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & & & & * \\ & 1 & & & \vdots \\ & & \ddots & & \vdots \\ & & & 1 & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & * \\ \vdots & & & \vdots & \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \end{array}\right)$$
$$\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & \cdots & k & \uparrow U_0^j \end{array}$$

<u>OSS</u> (Generale):

Se $A \underset{R}{\rightsquigarrow} B$, comunque scelti $j_1, \dots, j_t$ indici di colonne siano

$$A[j_1, \dots, j_t] = [A^{j_1} A^{j_2} \cdots A^{j_t}]$$

e

$$B[j_1, \dots, j_t] := [B^{j_1} B^{j_2} \cdots B^{j_t}]$$

le matrici ottenute da queste colonne, allora

$$A[j_1, \dots, j_t] \underset{R}{\rightsquigarrow} B[j_1, \dots, j_t].$$

(peraltro con le stesse operazioni elementari utilizzate per $A \underset{R}{\rightsquigarrow} B$).

Infatti, le operazioni elementari si effettuano sulle righe.

Es:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -4 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 & 5 \\ 1 & 1 & -6 & 3 \\ 2 & 1 & -8 & 5 \end{pmatrix}$$

$$A[2,4] = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B[2,4] = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 1 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -4 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{rref}(A)$$

$$B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 & 5 \\ 1 & 1 & -6 & 3 \\ 2 & 1 & -8 & 5 \end{pmatrix} \underset{\substack{R_1 \mapsto R_1 - R_3 \\ R_3 \mapsto R_3 - 2R_1}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 6 & 0 \\ 1 & 1 & -6 & 3 \\ 0 & -1 & 4 & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 6 & 0 \\ 0 & 3 & -12 & 3 \\ 0 & -1 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\underset{R_2 \leftrightarrow R_3}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 6 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 3 & -12 & 3 \end{pmatrix} \underset{\substack{R_3 \mapsto R_3 + 3R_2 \\ R_2 \mapsto -R_2}}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{rref}(B) = \mathrm{rref}(A)$$

$$\Rightarrow A \underset{R}{\rightsquigarrow} B$$

Per ottenere, esplicitamente, B da A:

$$A \underset{R}{\rightsquigarrow} \mathrm{rref}(A) = \mathrm{rref}(B) \underset{R}{\rightsquigarrow} B$$

$$A[2,4] \underset{R}{\rightsquigarrow} \mathrm{rref}(A)[2,4] = \mathrm{rref}(B)[2,4] \rightsquigarrow B[2,4]$$

$\blacksquare$

Applichiamo questa osservazione al nostro caso:

$$\overline{U}_0 \underset{R}{\rightsquigarrow} \overline{V}_0$$

Consideriamo $\overline{U}_0$ e $\overline{V}_0$ come matrici complete di un sistema di m equazioni e K incognite:

$$\overline{U}_0 = \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & u_1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & u_2 \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & & & & 1 & u_K \\ 0 & \cdots & & & & 0 & u_{K+1} \\ \vdots & & & & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & & & & 0 & u_m \end{array}\right) \qquad \overline{V}_0 = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 \cdots & 0 & v_1 \\ & & & v_2 \\ & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & v_K \\ 0 & \cdots & 0 & v_{K+1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & v_m \end{array}\right)$$

$$S_1: \begin{cases} x_1 = u_1 \\ x_2 = u_2 \\ \vdots \\ x_k = u_k \\ 0 = u_{k+1} \\ \vdots \\ 0 = u_m \end{cases} \qquad S_2: \begin{cases} x_1 = v_1 \\ x_2 = v_2 \\ \vdots \\ x_k = v_k \\ 0 = v_{k+1} \\ \vdots \\ 0 = v_m \end{cases}$$

S_1 e S_2 sono equivalenti, ovvero S_1 è compatibile $\iff$ S_2 è compatibile ed in tal caso $u_{k+1} = \dots = u_m = 0 = v_{k+1} = \dots = v_m$ e $u_1 = v_1, u_2 = v_2, \dots, u_k = v_k$. Quindi $U_0^j = V_0^j$, contro l'ipotesi.

Se S_1 (e quindi anche S_2) non è compatibile, $\exists\ l_1, l_2 > k$ tali che $u_{l_1} \neq 0$ e $v_{l_2} \neq 0$. Ma allora $l_1 = l_2 = k+1$ e $U^j = V^j = e_{k+1}$ sono dominanti. Anche in questo caso troviamo una contraddizione all'ipotesi $U^j \neq V^j$. $\boxtimes$

Es: Trovare rref(A) dove

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Sol.:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \underset{\substack{R_2 \mapsto R_2 - 3R_1 \\ R_3 \mapsto R_3 - R_1}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\underset{R_3 \mapsto R_3 - R_2}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\blacksquare$

Es: Studiare il seguente sistema lineare reale al variare di $k \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 + 4x_4 + 4x_5 = k \\ -x_1 + x_2 - 2x_4 + 2x_5 = k \\ 2x_1 - 2x_2 - x_3 + 5x_4 - x_5 = -2k \end{cases}$$

Sol.: La matrice completa è

$$\hat{A}_k = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & -2 & 4 & 4 & k \\ -1 & 1 & 0 & -2 & 2 & k \\ 2 & -2 & -1 & 5 & -1 & -2k \end{array}\right)$$

Riduciamola a scala ridotta ricordandoci che non possiamo dividere per (polinomi in) k:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & -2 & 4 & 4 & k \\ -1 & 1 & 0 & -2 & 2 & k \\ 2 & -2 & -1 & 5 & -1 & -2k \end{array}\right) \underset{\substack{R_2 \mapsto R_2+R_1 \\ R_3 \mapsto R_3-2R_1}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & -2 & 4 & 4 & k \\ 0 & 0 & -2 & 2 & 6 & 2k \\ 0 & 0 & 3 & -3 & -9 & -4k \end{array}\right)$$

$$\underset{\substack{R_2 \mapsto \frac{1}{2}R_2 \\ R_3 \mapsto \frac{1}{3}R_3}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & -2 & 4 & 4 & k \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 3 & k \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -3 & -\frac{4k}{3} \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & -2 & 4 & 4 & k \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 3 & k \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k \end{array}\right)$$

Il sistema é risolubile se e solo se $k=0$.

In questo caso otteniamo

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \mathrm{rref}(\hat{A}_0)$$

Le soluzioni sono

$$\left\{ \begin{pmatrix} x_2 - 2x_4 + 2x_5 \\ x_2 \\ x_4 + 3x_5 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \,\middle|\, x_2, x_4, x_5 \in \mathbb{R} \right\} =$$

$$= \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Applicazioni

L'algoritmo di Gauss si può utilizzare per risolvere diversi problemi. Vediamo i seguenti:

1) Calcolo di una base del nucleo di una matrice

2) Calcolo di una base dell'immagine di una matrice

3) Calcolo dell'inversa.

Base di Ker A

Siano $A, B \in Mat_{m \times n}(\mathbb{K})$. Allora

$$A \underset{R}{\sim} B \implies \operatorname{Ker} A = \operatorname{Ker} B.$$

Infatti se A e B sono equivalenti per righe allora i sistemi omogenei $AX = 0_{\mathbb{R}^m}$ e $BX = 0_{\mathbb{R}^m}$ sono equivalenti.

Per calcolare una base di Ker A:

1) Trovare $\operatorname{rref}(A) = R$

2) Calcolare le soluzioni-base di $RX = 0_{\mathbb{R}^m}$

Es: Trovare una base di $\operatorname{Ker}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Abbiamo

$$\operatorname{Ker}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -7 \end{pmatrix} = \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & \frac{7}{3} \end{pmatrix}$$

$$= \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{5}{3} \\ 0 & 1 & \frac{7}{3} \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 5 \\ -7 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle$$

OSS: Dati k vettori $v_1, \dots, v_k$ di $\mathbb{K}^n$ essi sono linearmente indipendenti se e solo se la matrice $A = (v_1 | \dots | v_k)$ che li contiene come colonne ha nucleo banale.

Infatti,

$$x_1 v_1 + \dots + x_n v_n = 0_{\mathbb{K}^n} \iff AX = 0_{\mathbb{K}^n}$$

$$\iff X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \operatorname{Ker} A.$$

Es: Dimostrare che $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ sono lin. Ind..

Sol.:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = S$$

$\operatorname{Ker} A = \operatorname{Ker} S$. $\dim \operatorname{Ker} S = 3 - \operatorname{rg} S = 0$

$\Rightarrow \operatorname{Ker} S = \{0_{\mathbb{R}^3}\} \Rightarrow \operatorname{Ker} A = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$

$\Rightarrow \{v_1, v_2, v_3\}$ è lin. Ind. $\boxtimes$

Base di Im A

Siano $A, B \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Allora

$$A \underset{R}{\sim} B \Rightarrow rg(A) = rg(B).$$

Infatti,

$$rg(A) = n - \dim \mathrm{Ker}\, A = n - \dim \mathrm{Ker}\, B = rg(B).$$

__Attenzione__: __Non__ è vero che $\mathrm{Im}\, A = \mathrm{Im}\, B$.

Ad esempio

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \underset{R}{\sim} B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ma ovviamente $\mathrm{Im}\, A \neq \mathrm{Im}\, B$.

Per calcolare il __rango di A__:

1) Trovare una matrice a scala $S \underset{R}{\sim} A$
2) Contare le colonne dominanti di S.

Es: Calcolare il rango di

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Sol.:

$$\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2.$$

$\blacksquare$

Es: Calcolare la dimensione di

$$U = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Sol.: Poniamo

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 7 \\ 1 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ e calcoliamo $\operatorname{rg} A$:

$$\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

$$\Rightarrow \dim U = \dim \operatorname{Col}(A) = \operatorname{rg} A = 2.$$

<u>Teorema</u>: Sia $A \in Mat_{m\times n}(\mathbb{K})$ e sia S una matrice a scala tale che

$$S \underset{R}{\sim} A.$$

Allora se $1 \leq j(1) < \dots < j(r) \leq n$ sono gli indici delle colonne dominanti di S allora $\{A^{j(1)}, \dots, A^{j(r)}\}$ è una base di $\operatorname{Im} A$.

<u>dim</u>: Supponiamo che S sia ottenuta da A attraverso delle operazioni elementari che denotiamo $R_1, R_2, \dots, R_{\ell+1}$:

$$A \underset{R_1}{\rightsquigarrow} A_1 \underset{R_2}{\rightsquigarrow} A_2 \dots \rightsquigarrow A_\ell \underset{R_{\ell+1}}{\rightsquigarrow} S$$

Consideriamo le matrici

$$A[j(1), \dots, j(r)] := [A^{j(1)} | \dots | A^{j(r)}]$$

$$S[j(1), \dots, j(r)] := [S^{j(1)} | \dots | S^{j(r)}]$$

che hanno per colonne le colonne $A^{j(1)}, \dots, A^{j(r)}$ di A e $S^{j(1)}, \dots, S^{j(r)}$ di S, rispettivamente.

Allora le stesse operazioni elementari $R_1, \dots, R_{e+1}$ che trasformano A in S, trasformano $A[j(1), \dots, j(r)]$ in $S[j(1), \dots, j(r)]$

$$A[j(1), \dots, j(r)] \underset{R_1}{\sim} \dots \underset{R_{e+1}}{\sim} S[j(1), \dots, j(r)].$$

In particolare,

$$\operatorname{Ker} A[j(1), \dots, j(r)] = \operatorname{Ker} S[j(1), \dots, j(r)] = \{0_{\mathbb{R}^n}\}$$

Ne segue che $A^{j(1)}, \dots, A^{j(r)}$ sono linearmente indipendenti.

Poiché $\operatorname{rg} A = r = |\{A^{j(1)}, \dots, A^{j(r)}\}|$ ne segue che $\{A^{j(1)}, \dots, A^{j(r)}\}$ è una base di $\operatorname{Col}(A)$

$\boxtimes$

Per Trovare una base di $\operatorname{Im} A$:

1) Trovare una matrice a scala $S \underset{R}{\sim} A$ con l'algoritmo di gauss.

2) Trovare gli indici $j(1) < \dots < j(r)$ delle colonne dominanti di S

3) $\{A^{j(1)}, \dots, A^{j(r)}\}$ è una base di $\operatorname{Col}(A)$

<u>OSS</u>: Gli indici $j(1), \dots, j(r)$ non dipendono dalla particolare matrice a scala S trovata al punto 1). Le colonne di A corrispondenti, $A^{j(1)}, \dots, A^{j(r)}$, si chiamano le <u>colonne dominanti</u> di A.

Es: Trovare una base del sottospazio

$$U = \left\langle \begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\3\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}5\\7\\5\\2\end{pmatrix} \right\rangle$$

Sol.: Poniamo $A = \begin{pmatrix}1&1&2&5\\1&2&3&7\\1&1&2&5\\0&1&1&2\end{pmatrix}$ cosicché $U = Col(A)$.

$$A \sim \begin{pmatrix}1&1&2&5\\0&1&1&2\\0&0&0&0\\0&1&1&2\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1&1&2&5\\0&1&1&2\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix} = S$$

gli indici delle colonne dominanti sono $j(1)=1$ e $j(2)=2$. Ne segue che $rg\, A = 2$ ed una base di $Col(A)$ è

$$\left\{A^{j(1)}, A^{j(2)}\right\} = \left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\1\\1\end{pmatrix}\right\}.$$