# Numeri

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ : numeri NATURALI

$\cap$

$\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ : numeri naturali con zero

$\cap$

$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ : numeri INTERI

$\cap$

$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \right\}$ : numeri RAZIONALI

$\cap$

$\mathbb{R} = \{\dots \sqrt{2}, \pi, \dots\}$ : numeri REALI

# OPERAZIONI

- In $\mathbb{N}$ possiamo SOMMARE
- In $\mathbb{N}_0$ possiamo SOMMARE ed inoltre possiamo SOMMARE CON ZERO.

- In $\mathbb{Z}$ possiamo SOMMARE, SOMMARE CON 0, MOLTIPLICARE
- In $\mathbb{Q}$ possiamo SOMMARE, SOMMARE CON 0, MOLTIPLICARE, DIVIDERE

- In $\mathbb{R}$ possiamo SOMMARE, SOMMARE CON 0, MOLTIPLICARE, DIVIDERE

$\mathbb{Q}$ ed $\mathbb{R}$ hanno le stesse proprietà formali.

La costruzione di $\mathbb{R}$ verrà svolta nel corso di analisi. A noi interessano solo le proprietà formali di + e $\cdot$.

## Operazioni

Dato un insieme $X$ ed un insieme $Y$ si definisce il prodotto cartesiano di $X$ con $Y$ come l'insieme delle coppie ordinate di elementi di $X$ per primo e $Y$ per secondo:

$$\boxed{X \times Y := \{ (x,y) \mid x \in X,\ y \in Y \}}$$

Prodotto cartesiano.

La notazione $(x,y)$ indica una coppia ordinata.

Leggiamo: "$X$ cartesiano $Y$ è l'insieme delle coppie ordinate $(x,y)$ in cui $x$ appartiene a $X$ ed $y$ appartiene a $Y$".

NB: $(x,y) \neq (y,x)$ in generale.

**Es**: $X = \{1, 2\}$ $\quad Y = \{3, 4\}$

$X \times Y = \{(1,3), (1,4), (2,3), (2,4)\}$

$Y \times X = \{(3,1), (4,1), (3,2), (4,2)\} \neq Y \times X$

**Es**: $X = \{1, 2\}$

$X \times X = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2)\}$

Un' <u>operazione</u> su un insieme $X$
è una funzione $* : X \times X \to X$.
Notazione: $*(a,b) =: a * b$.

**Es**: $X = \{1, 2\}$ definiamo la funzione
$* : X \times X \to X$ data da

$a * b = \min(a, b)$.

$1 * 1 = 1, \ 1 * 2 = 1, \ 2 * 1 = 1, \ 2 * 2 = 2.$

# Proprietà della somma

Sia $X$ uno degli insiemi $\mathbb{N}, \mathbb{N}_0, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$.

La somma $+ : X \times X \longrightarrow X$ gode delle seguenti proprietà:

1) $(a+b)+c = a+(b+c) \quad \forall a, b, c \in X$
(ASSOCIATIVA)

2) $a+b = b+a \quad \forall a, b \in X$
(COMMUTATIVA)

Se $X$ è $\mathbb{N}_0, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$

3) $\exists\, 0 \in X$ tale che $a+0 = 0+a = a \ \forall a$
(ESISTE L'ELEMENTO NEUTRO).

Se $X$ è $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$

4) $\forall a \in X \ \exists\, b \in X$ t.c. $a+b=0$.
(ESISTENZA DELL'OPPOSTO)

# Proprietà del prodotto

Sia $X$ uno degli insiemi $\mathbb{N}, \mathbb{N}_0, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$.
La moltiplicazione (o prodotto) su $X$ è un'operazione che denotiamo con

$$\cdot : X \times X \longrightarrow X$$

Essa gode delle seguenti proprietà:

1) $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) \qquad \forall a, b, c \in X$

(ASSOCIATIVA)

2) $a \cdot b = b \cdot a \qquad \forall a, b \in X$

(COMMUTATIVA)

3) $\exists$ un elemento $1 \in X$ tale che

$$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a \qquad \forall a \in X$$

(ESISTENZA DELL'ELEMENTO NEUTRO)

Se $X$ è $\mathbb{Q}$ o $\mathbb{R}$

4) $\forall a \in X \setminus \{0\} \ \exists \, b \in X$ t.c. $a \cdot b = 1$

(ESISTENZA DELL'INVERSO)

Definizione

Un GRUPPO è una coppia $(X, *)$ dove $X$ è un insieme e $* : X \times X \to X$ è un'operazione su $X$ che gode delle seguenti proprietà:

1) Associativa: ovvero
$$(a*b)*c = a*(b*c) \quad \forall a,b,c \in X$$
2) Ammette un elemento neutro $x_0$
$$a * x_0 = x_0 * a = a \quad \forall a \in X$$
3) ogni elemento ha inverso, ovvero
$$\forall a \in X \ \exists \, b \in X \text{ t.c. } a*b = x_0 = b*a$$

Se inoltre $*$ gode della proprietà
4) commutativa, ovvero
$$a*b = b*a \quad \forall a,b \in X$$
allora $(X,*)$ si dice un gruppo commutativo o abeliano.

Esempi:

$(\mathbb{N}, +)$ non è un gruppo

$(\mathbb{N}_0, +)$ non è un gruppo

$(\mathbb{Z}, +)$ è un gruppo

$(\mathbb{Q}, +)$ è un gruppo

$(\mathbb{R}, +)$ è un gruppo

$(\mathbb{N}, \cdot)$ non è un gruppo

$(\mathbb{N}_0, \cdot)$ non è un gruppo

$(\mathbb{Z}, \cdot)$ non è un gruppo

$(\mathbb{Q}, \cdot)$ è un gruppo

$(\mathbb{R}, \cdot)$ è un gruppo

NB: Se l'operazione è additiva l'inverso si chiama opposto.

## Campi.

Abbiamo visto che $\mathbb{Q}$ ed $\mathbb{R}$ sono gruppi sia rispetto alla somma che al prodotto.

Inoltre la somma ed il prodotto godono della seguente proprietà:

$$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c \qquad \forall a, b, c$$

che si dice proprietà distributiva della somma rispetto al prodotto.

## Definizione

Un campo è una tripla $(K, +, \cdot)$ in cui $K$ è un insieme e $+, \cdot : K \times K \to K$ sono due operazioni su $K$ tali che

- $(K, +)$ è un gruppo.

Denotiamo con $0 \in K$ l'elemento neutro di $(K, +)$.

- $(K \setminus \{0\}, \cdot)$ è un gruppo
- $a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c \quad \forall a, b, c \in K$

Es: $\mathbb{Q}$ ed $\mathbb{R}$ sono campi.

OSS: In $\mathbb{Q}$ ed $\mathbb{R}$ c'è un "ordinamento" naturale per il quale i quadrati sono esattamente i numeri positivi:

$$\mathbb{R}_{>0} = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\} = \{y^2 \mid y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$$

## Numeri Complessi

Consideriamo i polinomi di grado $\leq 1$ a coefficienti reali

$$\mathbb{R}[x]_{\leq 1} := \{a + bx \mid a, b \in \mathbb{R}\}.$$

Possiamo sommare due polinomi "grado per grado"

$$(a+bx) + (c+dx) := (a+c) + (b+d)x$$

e moltiplicarli con la regola

$$(a+bx)(c+dx) = ac + (ad+bc)x + bdx^2$$

Si noti che il prodotto di due polinomi di grado 1 è un polinomio di grado 2 e quindi questo prodotto non è una operazione di $\mathbb{R}[x]_{\leq 1}$.

<u>Imponiamo</u> : $\boxed{x^2 = -1}$

e otteniamo i numeri complessi che si denotano con $\mathbb{C}$.

Quindi,

$$\mathbb{C} = \{a + bx \mid a, b \in \mathbb{R}, x^2 = -1\}$$

Per motivi storici la lettera $x$ usata nella definizione qui sopra si denota con $i$. La lettera $i$ sta per "immaginario" perché non esiste nessun numero reale il cui quadrato è $-1$.

Riformuliamo con questa notazione

$$\mathbb{C} = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}\}$$

Si noti che adesso non dobbiamo più specificare che $i^2 = -1$ perché il simbolo $i$ denota una variabile formale che ha proprio questa proprietà.

Imponendo $i^2=-1$, ovvero $x^2=-1$, l'insieme $\mathbb{R}[x]_{\leq 1}$ si denota con $\mathbb{C}$.
Ma adesso la moltiplicazione è un'operazione su $\mathbb{C}$:

$$(a+bx)(c+dx) = ac+(ad+bc)x+bdx^2$$

$$\underset{x^2=-1}{=} (ac-bd)+(ad+bc)x$$

Con la notazione $i$:

$$(a+bi)(c+di) = (ac-bd)+(ad+bc)i$$

Abbiamo quindi definito un insieme $\mathbb{C}$ dotato di una somma e di un prodotto.

Dato $z=a+bi$

$a = \mathrm{Re}(z)$ si chiama la <u>parte reale</u>

$b = \mathrm{Im}(z)$ si chiama la <u>parte immaginaria</u>

di $z$. $z \in \mathbb{R} \iff b = \mathrm{Im}(z) = 0$.

<u>Teorema</u>: $\mathbb{C}$ dotato di questa somma e di questo prodotto è un campo.

<u>dim</u>:

·) $(\mathbb{C},+)$ è un gruppo abeliano perché la somma si fa grado per grado. El. neutro $= 0+0i =: 0$.

·) $(\mathbb{C}\setminus\{0\},\cdot)$ è un gruppo abeliano:

<u>elemento neutro</u>: $1 = 1+0i$:

$(a+bi)1 = a\cdot 1+(b\cdot 1)i = a+bi$

<u>commutatività</u>: Dati $z=a+bi$ e $w=c+di$

$zw = (ac-bd)+(ad+bc)i =$

$= (ca-db)+(da+cb)i =$

$(\mathbb{R},\cdot)$ è abeliano

$= (c+di)(a+bi) = wz$

<u>associatività</u>: dati $z=a+bi$, $w=c+di$ e $u=e+fi$ calcoliamo:

$$(zw)u=\left[(ac-bd)+(ad+bc)i\right](e+fi)$$
$$=\left[(ac-bd)e-(ad+bc)f\right]+$$
$$+\left[(ac-bd)f+(ad+bc)e\right]i$$

$$=\left[a(ce-df)-b(de+cf)\right]+$$
$$\left[a(cf+de)+b(-df+ce)\right]i$$

$$=(a+bi)\left[(ce-df)+(de+cf)i\right]$$

$$=z\left[(c+di)(e+fi)\right]=$$

$$=z(wu).$$

**Inverso**: Sia $z = a+bi \neq 0$.

Cerchiamo $w = c+di$ tale che $zw = 1$.

Notiamo che

$$(a+bx)(a-bx) = a^2 - b^2x^2$$

Quindi

$$(a+bi)(a-bi) = a^2 + b^2 \in \mathbb{R}_{>0}$$

Dividiamo entrambi i membri per $a^2+b^2$

$$(a+bi)\frac{(a-bi)}{a^2+b^2} = 1$$

Concludiamo che

$$z^{-1} = \frac{a-bi}{a^2+b^2}$$

**Es**: Calcolare l'inverso di $z = 2-3i$.

**Sol.**: $z^{-1} = \dfrac{2+3i}{13} = \dfrac{2}{13} + \dfrac{3}{13}i$

Verifichiamo:

$$(2-3i)\left(\frac{2}{13}+\frac{3}{13}i\right) = \left(\frac{4}{13}+\frac{9}{13}\right) + \left(\frac{6}{13}-\frac{6}{13}\right)i = 1.$$

Rimane da verificare la distributività:

∘) Dati $z = a+bi$, $w = c+di$ e $u = e+fi$

$$z(w+u) = (a+bi)((c+e)+(d+f)i)$$
$$= a(c+e) - b(d+f) +$$
$$+ [b(c+e) + a(d+f)]i$$
$$= \underbrace{(ac-bd)+(ad+bc)i}_{zw} + \underbrace{(ae-bf)+(be+af)i}_{zu}$$

$$= zw + zu.$$

Concludiamo che $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ è un campo.

$\boxtimes$

OSS: $\mathbb{C}$ non è ordinato. Se lo fosse $i^2 = -1$ sarebbe positivo, ma allora $\forall z \in \mathbb{C}$ $0 \leq i^2 = -1$

$$0 \leq z \Rightarrow 0 \leq zi^2 = -z \Rightarrow z, -z \geq 0,$$

Nella determinazione dell'inverso di $z = a+bi$ abbiamo usato l'importante uguaglianza

$$\boxed{(a+bi)(a-bi) = a^2+b^2} \qquad (*)$$

Notiamo che se $z = a+bi$ è diverso da $0$ allora $a^2+b^2$ è un numero reale positivo. Esso si chiama la <u>norma</u> o il <u>modulo</u> del numero complesso $z$ e si denota $|z|$:

$$\boxed{|a+ib| = \sqrt{a^2+b^2}}$$

Il numero complesso $a-bi$ si chiama il <u>coniugato</u> di $z = a+bi$ e si denota $\overline{z}$:

$$\boxed{\overline{a+ib} := a-ib} \quad \text{coniugato}$$

Riformuliamo $(*)$:

$$\boxed{z\overline{z} = |z|^2}$$

## Proprietà della norma

La norma o modulo è quindi una funzione

$$|\cdot| : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \ : \ |a+bi| := \sqrt{a^2+b^2}$$

che gode delle seguenti proprietà formali:

•) $|z| = 0 \iff z = 0$

Infatti, $a^2+b^2=0 \iff a=b=0$.

•) $|zw| = |z||w|$

Infatti, posto $z=a+bi$ e $w=c+di$

$$|zw|^2 = |(ac-bd)+(ad+bc)i| =$$
$$= (ac-bd)^2 + (ad+bc)^2 =$$
$$= a^2c^2+b^2d^2-2abcd + a^2d^2+b^2c^2+2abcd$$
$$= a^2(c^2+d^2)+b^2(d^2+c^2)$$
$$= (a^2+b^2)(c^2+d^2) = |z|^2|w|^2$$

•) $|\bar{z}| = |z|$

Infatti, se $z=a+bi$

$$|\bar{z}|^2 = |a-bi|^2 = a^2+(-b)^2 = a^2+b^2 = |z|^2$$

# Proprietà del coniugio

Il coniugio è quindi una funzione

$\overline{\cdot} : \mathbb{C} \to \mathbb{C} : \overline{a+bi} = a-bi$

e gode delle seguenti proprietà:

- $\overline{z} = z \iff z \in \mathbb{R} \iff \Im m(z) = 0$

Infatti,

$a-bi = a+bi \iff b=-b \iff b=0.$

- $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$

Infatti, se $z=a+bi$ e $w=c+di$

$\overline{z+w} = \overline{(a+c)+(b+d)i} = (a+c)-(b+d)i$

$= (a-bi)+(c-di) = \overline{z} + \overline{w}$

- $\overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}$

Infatti, se $z=a+bi$ e $w=c+di$

$\overline{zw} = \overline{(ac-bd)+(ad+bc)i} =$

$= (ac-bd)-(ad+bc)i$

$= (ac-bd)+(a(-d)+(-b)c)i$

$= (a-bi)(c-di) = \overline{z}\,\overline{w}$

**Es**: Calcolare norma e coniugato di $2z$, $-2z$, $-2zw$, $-2z+w$ dove $z = 1-i$ e $w = 1+2i$:

**Sol.**:

$$|2z| = |2||z| = 2(1+1) = 4$$

$$\overline{2z} = \overline{2}\,\overline{z} = 2(1+i) = 2+2i$$

$$|-2zw| = |-2||zw| = 2|z||w| = 2(1+1)(1+4) = 10$$

$$\overline{-2zw} = \overline{-2}\;\overline{zw} = (-2)\,\overline{z}\,\overline{w} = -2(1+i)(1-2i)$$

$$= -2(3-i) = -6+2i$$

$$|-2z+w| = |-2+2i+1+2i| = |-1+4i| = 17$$

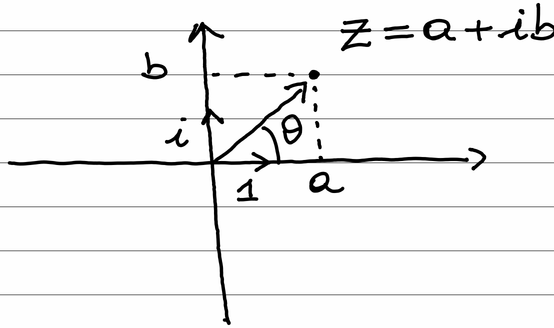
$$\overline{-2z+w} = \overline{-2z} + \overline{w} = \overline{-2}\;\overline{z} + \overline{w}$$

$$= -2(1+i)+(1-2i) = -2-2i+1-2i$$

$$= -1-4i$$

# Forma trigonometrica dei numeri complessi

Possiamo rappresentare i numeri complessi sul piano cartesiano




$$z = |z| (\cos\vartheta + i \sin\vartheta)$$

$\forall \rho > 0$ e $\vartheta \in [0, 2\pi)$ $\exists!\, z \in \mathbb{C}$ t.c.

$$z = \rho (\cos\vartheta + i \sin\vartheta)$$

Introduciamo la notazione

$$e^{i\vartheta} := \cos\vartheta + i \sin\vartheta$$

allora

$$z = \rho e^{i\vartheta}$$

$(\rho, \vartheta)$ = coordinate polari di $z$.

;

$$z = \rho e^{i\theta} \qquad w = \sigma e^{i\gamma}$$

$$\Rightarrow \boxed{zw = \rho\sigma e^{i(\theta+\gamma)}}$$

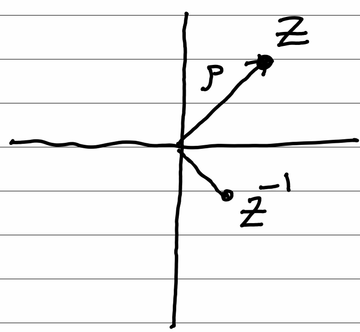
Questo segue dalle formule:

$$\cos(\theta+\gamma) = \cos\theta\cos\gamma - \sin\theta\sin\gamma$$

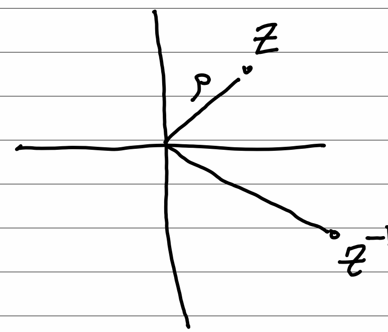
$$\sin(\theta+\gamma) = \sin\theta\cos\gamma + \cos\theta\sin\gamma.$$

Vale anche

$$\boxed{z^{-1} = \rho^{-1} e^{i(-\theta)}}$$




$(\rho>1)$




$(\rho<1)$

In particolare,

$$zw^{-1} = \frac{\rho}{\sigma} e^{i(\theta-\gamma)}$$

La notazione trigonometrica è utile per calcolare potenze e radici:

$$\boxed{\text{Se } z = \rho e^{i\vartheta} \text{ allora } z^n = \rho^n e^{in\vartheta}}$$

Formula di De Moivre

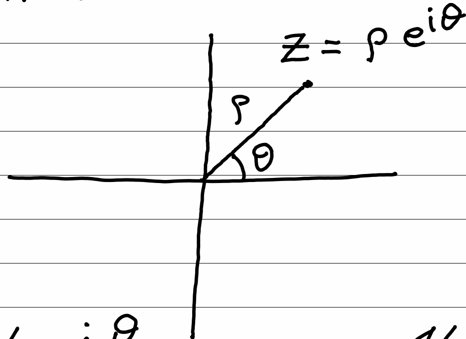
Dato $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ e $n \geq 1$ allora esistono esattamente $n$ radici $n$-esime di $z$: $w_0, w_1, w_2, \ldots, w_{n-1}$ che sono date da

$$w_k = \rho^{1/n} e^{i\left(\frac{\vartheta + 2k\pi}{n}\right)}$$

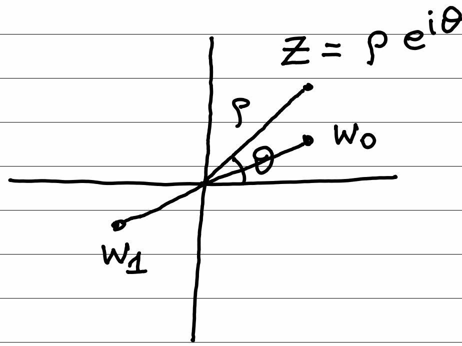
Radici $n$-esime.

dove $\rho^{1/n}$ è l'unica radice reale positiva del numero reale $\rho > 0$.

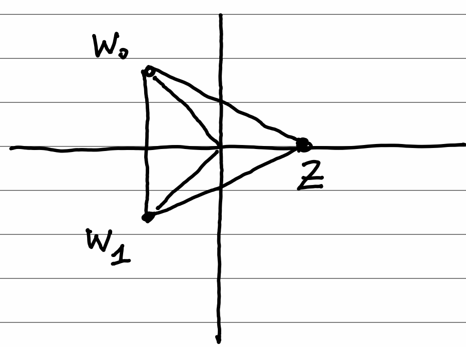
Es: $n = 2$




$W_0 = \rho^{1/2} e^{i\frac{\theta}{2}}$ $\qquad$ $W_1 = \rho^{1/2} e^{i\left(\frac{\theta}{2} + \bar{\imath}2\pi\right)}$




$n = 3$ $\qquad$ $z = 1 = 1 e^{i0}$




$W_0 = z$

$W_1 = e^{i\frac{2\pi}{3}}$

$W_2 = e^{i\frac{4}{3}\pi}$

Il motivo per cui siamo interessati ai numeri complessi in questo corso è il seguente fondamentale risultato che assumiamo senza dimostrazione

<u>Teorema Fondamentale dell'algebra</u>

Dato un polinomio a coefficienti reali

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$$

$(a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R})$ esiste $\lambda \in \mathbb{C}$ tale che $p(\lambda) = 0$.

Il numero complesso $\lambda$ tale che $p(\lambda) = 0$ si chiama una <u>radice</u> o uno <u>zero</u> del polinomio $p$.

Questo Teorema importantissimo ci dice che ogni polinomio ha una radice complessa.

Sappiamo che dati due polinomi

$p_1(x)$ e $p_2(x)$ con grado $(p_1) >$ grado $(p_2) > 0$

esistono due polinomi $q(x)$ ed $r(x)$ t.c.

$$\boxed{p_1(x) = q(x)\,p_2(x) + r(x)}$$

ed inoltre

$$0 \leq \text{grado}\,(r) < \text{grado}\,(p_2)$$

$q$ = quoziente di $p_1$ per $p_2$

$r$ = resto della divisione

$q$ ed $r$ si trovano con l'algoritmo di divisione euclidea.

Es: Dividiamo

$p_1(x) = 2x^4 + x^3 - 2x^2 + 2$ per

$p_2(x) = 2x^2 - 3x + 1$ :

$$\begin{array}{l|l}
2x^4 + x^3 - 2x^2 + 2 & 2x^2 - 3x + 1 \\ \hline
-\;2x^4 - 3x^3 + x^2 & x^2 + 2x + \frac{3}{2} \\ \cline{1-1}
\quad 4x^3 - 3x^2 + 2 & \\
-\;4x^3 - 6x^2 + 2x & \\ \cline{1-1}
\qquad 3x^2 - 2x + 2 & \\
-\;3x^2 - \frac{9}{2}x + \frac{3}{2} & \\ \cline{1-1}
\qquad \boxed{\frac{5}{2}x + \frac{1}{2}} &
\end{array}$$

quoziente $q(x)$ $\;\; \left(x^2 + 2x + \frac{3}{2}\right)$

resto $r(x)$ $\;\; \left(\frac{5}{2}x + \frac{1}{2}\right)$

$$p_1(x) = q(x)\, p_2(x) + r(x)$$

OSS: Se $\lambda$ è una radice di $p(x)$ allora il polinomio $x-\lambda$ divide $p(x)$.

Infatti, dato che

$$\text{grado}(p) \geq 1 = \text{grado}(x-\lambda)$$

esistono polinomi $q(x)$ ed $r(x)$ t.c.

$$p(x) = q(x)(x-\lambda) + r(x)$$

ed inoltre $\text{grado}(r(x)) < \text{grado}(x-\lambda) = 1$

Quindi $r(x)$ è un polinomio costante $r(x) \equiv r \in \mathbb{R}$. Ma allora

$$p(x) = q(x)(x-\lambda) + r$$

$$\Rightarrow \quad 0 = p(\lambda) = q(\lambda)0 + r = r$$

$$\Rightarrow \quad r = 0 \quad \Rightarrow \quad r(x) = 0$$

$$\Rightarrow \quad p(x) = q(x)(x-\lambda)$$

· Iterando questo ragionamento, vediamo che il Teorema fondamentale dell'algebra implica:

Dato un polinomio a coefficienti reali

$$p(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$$

di grado $n$ (ovvero $a_n \neq 0$) esso si decompone nel prodotto di polinomi di primo grado

$$\boxed{p(x) = \alpha (x-\lambda_1)^{n_1} (x-\lambda_2)^{n_2} \cdots (x-\lambda_k)^{n_k}} \quad (*)$$

dove $\alpha \in \mathbb{R}$, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k \in \mathbb{C}$ sono le radici distinte di $p$ e $n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}$ si chiamano le molteplicità algebriche delle relative radici

$n_1$ = molteplicità algebrica di $\lambda_1$

$n_2$ = molteplicità algebrica di $\lambda_2$

e così via. Inoltre $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$.

$(*)$ si chiama la decomposizione di $p$ in fattori irriducibili.

<u>Esempio</u>: Le radici di un polinomio

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$

di grado due sono

$$\lambda_{1,2} = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_0a_2}}{2a_0}$$

Il numero reale $\Delta := a_1^2 - 4a_0a_2$ si dice il discriminante del polinomio.

- Se $\Delta > 0$ ci sono due radici reali e distinti
- Se $\Delta = 0$ c'è una sola radice
- Se $\Delta < 0$ ci sono due radici complesse e coniugate

$$\lambda_{1,2} = -\frac{a_1}{2a_0} \pm \frac{\sqrt{\Delta}}{2a_0} = -\frac{a_1}{2a_0} \pm \frac{\sqrt{|\Delta|}}{2a_0} i$$

<u>OSS</u>: $p(x) = a_2 (x-\lambda_1)(x-\lambda_2)$

Esempio:

·) Le radici di $p(x) = x^2+1$ sono $i$ e $-i$

·) Le radici di $p(x) = 2-2x+x^2$ sono

$$\frac{2 \pm \sqrt{4-8}}{4} = \frac{2 \pm \sqrt{-4}}{4} = \frac{2 \pm \sqrt{4}\, i}{4} = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} i$$

·) Trovare le radici di

$$p(x) = x^3 - 3x^2 + x + 1 .$$

Cerchiamo $\lambda \in \mathbb{C}$ t.c. $p(\lambda) = \lambda^3 - 3\lambda^2 + \lambda + 1 = 0$

$$\iff \lambda\left(\lambda^2 - 2\lambda + 1\right) - \lambda^2 + 1 = 0$$

$$\iff \lambda\,(\lambda-1)^2 = \lambda^2 - 1$$

$$\iff \lambda\,(\lambda-1)^2 = (\lambda+1)(\lambda-1)$$

Quindi $\lambda = 1$ è una radice.

$$x^3 - 3x^2 + x + 1 \quad \Big| \quad x-1$$

$$x^3 - x^2 \qquad\qquad \quad x^2 - 2x - 1$$

$$-2x^2 + x + 1$$

$$-2x^2 + 2x$$

$$-x + 1$$

$$p(x) = (x-1)(x^2 - 2x - 1)$$

Le radici di $x^2-2x-1$ sono

$$\frac{2 \pm \sqrt{4+4}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{8}}{2} = 1 \pm \sqrt{2}$$

Quindi

$$p(x) = (x-1)\left(x-(1+\sqrt{2})\right)\left(x-(1-\sqrt{2})\right)$$

Es: Sapendo che 2 è una sua radice, trovare la decomposizione in fattori irriducibili del polinomio

$$p(x) = 3x^3 - 9x + 6$$

Sol.: Dividiamo $p(x)$ per $(x-2)$

$$\begin{array}{l|l}
3x^3 - 9x + 6 & x-2 \\ \hline
-\ 3x^3 - 6x^2 & 3x^2+6x+3 \\ \hline
6x^2 - 9x + 6 & \\
-\ 6x^2 - 12x & \\ \hline
3x - 6 & \\
3x - 6 & \\ \hline
// &
\end{array}$$

$$p(x) = (x-2)(3x^2+6x+3) =$$
$$= 3(x-2)(x^2+2x+1) = 3(x-2)(x+1)^2$$