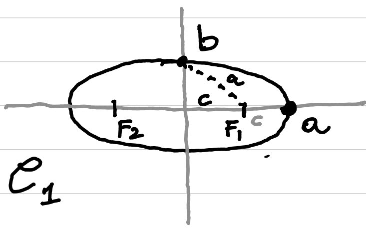
Le coniche

Ricordiamo :

Ellissi :

$|d(P,F_1)+d(P,F_2) = 2a$



$\mathcal{C}_1$

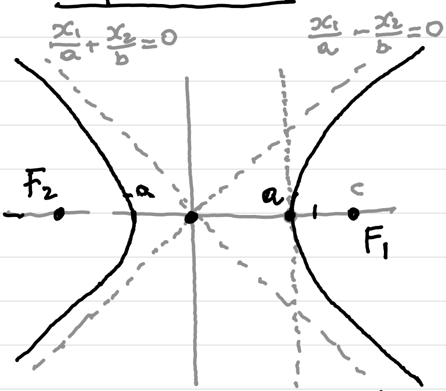
$$\boxed{P_1(X) = \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} - 1 = 0}$$

I fuochi sono

Centro $= \frac{1}{2}F_1 + \frac{1}{2}F_2$, $F_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{|a^2-b^2|} \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad F_2 = \begin{pmatrix} -\sqrt{|a^2-b^2|} \\ 0 \end{pmatrix}$

Iperboli :

$|d(P,F_1) - d(P,F_2)| = 2a\}$



$$\boxed{P_2(X) = \frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2} - 1 = 0}$$

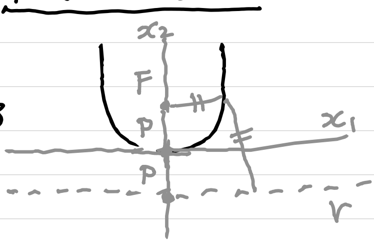
I fuochi sono

asintoti: $\frac{x_1}{a} = \pm\frac{x_2}{b}$, $F_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{b^2+a^2} \\ 0 \end{pmatrix}$, $F_2 = \begin{pmatrix} -\sqrt{b^2+a^2} \\ 1 \end{pmatrix}$

Parabola

$$\boxed{P_3(X) = x_1^2 - 4p\,x_2 = 0}$$

$\mathcal{C}_3$



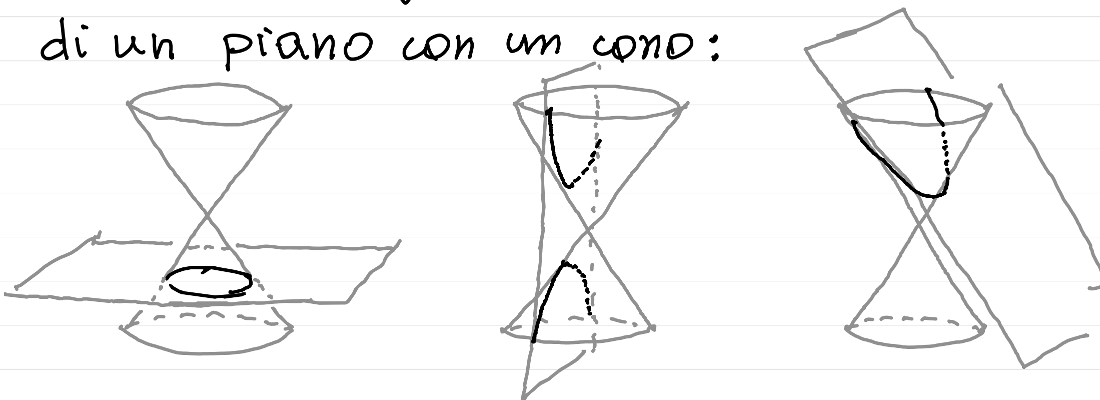
Il fuoco è $F = \begin{pmatrix} 0 \\ p \end{pmatrix}$

La direttrice è $r: x_2 = -p$

- $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3$ si chiamano <u>coniche reali non-degeneri</u>

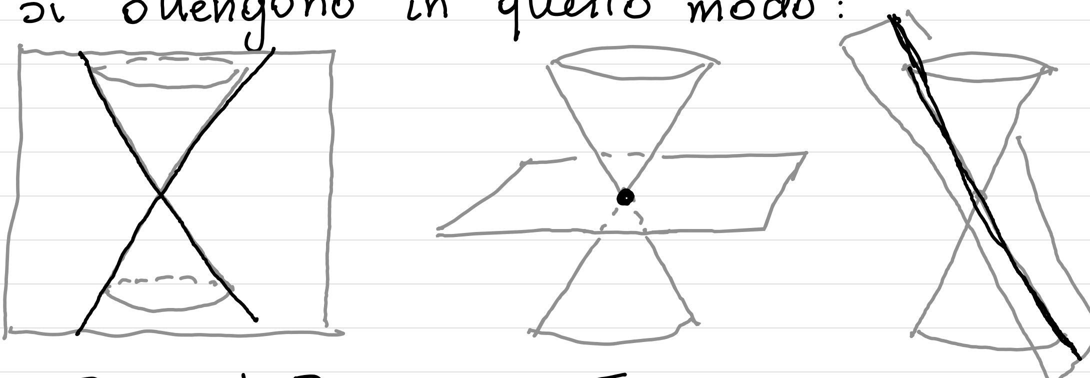
Le equazioni $p_1(x)=0$, $p_2(x)=0$, $p_3(x)=0$ sono la <u>forma metrica canonica</u> di $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3$.

Esse si ottengono come intersezione di un piano con un cono:



ellisse iperbole parabola

Ci sono anche altri luoghi che si ottengono in questo modo:



rette incidenti in un punto $x_1^2 - x_2^2 = 0$

Punto $x_1^2 + x_2^2 = 0$

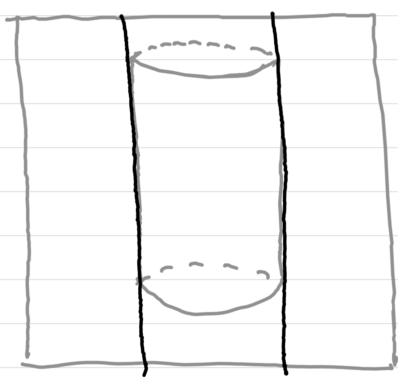
2 rette coincidenti $x_1^2 = 0$

Osserviamo che $x_1^2+x_2^2=0$ è

$$x_1^2+x_2^2=(x_1+ix_2)(x_1-ix_2)=0$$

e quindi rappresenta due rette complesse incidenti.

Se spostiamo il vertice del cono all'infinito, il cono diventa un cilindro e otteniamo anche



due rette parallele $x=1$, $x=-1$

$$x^2-1=0$$

Def: Una conica è il luogo degli zeri di un polinomio

$$p(x) = a x_1^2 + b x_1 x_2 + c x_2^2 + d x_1 + e x_2 + f$$

di secondo grado in due variabili.

Denotiamo

$$\mathcal{C}_p = \{ x \in \mathbb{R}^2 \mid p(x) = 0 \}$$

Osserviamo che

$$p(x) = x^t \hat{A} x$$

dove

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} a & b/2 & d/2 \\ b/2 & c & e/2 \\ d/2 & e/2 & f \end{pmatrix}$$

Conviene riscrivere p nella forma

$$p(x) = a_{11} x_1^2 + 2 a_{12} x_1 x_2 + a_{22} x_2^2 + $$
$$+ 2 b_1 x_1 + 2 b_2 x_2 + f$$
$$= x^t A x + 2 b \cdot x + f$$

dove $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$, $\hat{A} = \left(\begin{array}{c|c} A & b \\ \hline b^t & f \end{array} \right)$.

Oss: A e $\hat{A}$ sono simmetriche!

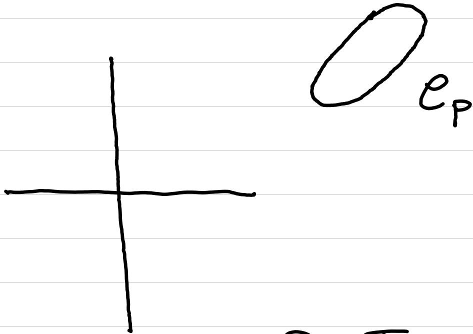
Possiamo cambiare le coordinate X in modo da rendere $\mathcal{C}_p$ in una forma "standard", ovvero in cui gli assi di simmetria coincidono con gli assi $x=0$, $y=0$.
Se il cambiamento è metrico ovvero preserva le distanze, allora diciamo che la nuova conica è metricamente equivalente alla vecchia.
Altrimenti diciamo che le due coniche sono affinemente equivalenti. Più precisamente

Def: $\mathcal{C}_p$ e $\mathcal{C}_q$ sono affinemente eq. se $\exists\, B$ invertibile, $C \in \mathbb{R}^2$ e $\sigma \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ t.c.

$$p(X) = \sigma\, q(BX + C).$$

Sono metricamente eq. se $B^{-1} = B^t$.

Illustrazione del procedimento

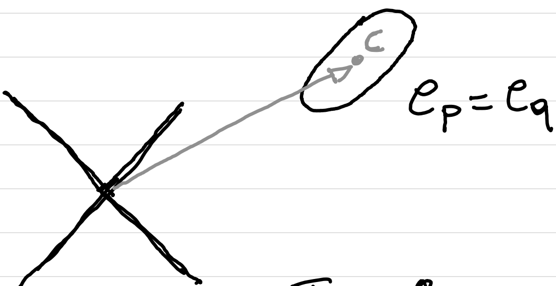


$$p(X) = 0$$

Ruotiamo gli assi per renderli paralleli agli assi di simmetria di e_p

$$X = BY$$

$B = R_\theta$: ortogonale, $\det B = 1$.

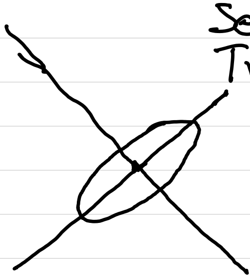


$$p(X) = q(Y) = 0$$

Trasliamo di C in maniera da portare O nel centro.

$$Y = Z + C$$

Se e è una parabola (= senza centro) Trasliamo il vertice



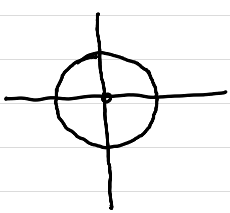
$$p(X) = q(Y) = r(Z) = 0$$

Quindi $\mathcal{C}_p$ e $\mathcal{C}_r$ sono metricamente equivalenti.

Adesso possiamo fare un ulteriore passaggio: riscalare le coordinate z_1, z_2 in maniera che nell'equazione $r(z)=0$ z_1^2 e z_2^2 abbiano coefficiente ± 1 (oppure 0).

$$\Big\downarrow \quad z = \Lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Non è metrico



$\mathcal{C}_t : t(x,y) = 0$

$\mathcal{C}_t$ è affinemente equivalente a $\mathcal{C}_p$.

<u>Teorema</u> (Classificazione affine delle coniche).

Una conica $\mathcal{C}_P$ è affinemente equivalente ad una ed una sola delle seguenti nove coniche:

1) $x^2+y^2-1=0$ [Ellisse reale]
2) $x^2-y^2-1=0$ [Iperbole]
3) $x^2-y=0$ [Parabola]
4) $x^2+y^2+1=0$ [Ellisse Immaginaria]
5) $x^2-y^2=0$ [Rette reali incidenti]
6) $x^2+y^2=0$ [Rette complesse incidenti]
7) $x^2-1=0$ [Rette reali parallele]
8) $x^2+1=0$ [Rette complesse parallele]
9) $x^2=0$ [Rette coincidenti].

Invarianti:

Per distinguere o identificare due coniche $\mathcal{C}_p$ e $\mathcal{C}_q$ possiamo notare che ci sono dei numeri associati a p e q che <u>non</u> cambiano se effettuiamo un cambiamento di coordinate metrico: e si chiamano invarianti metrici, ed altri che non cambiano se facciamo un cambiamento di coordinate affini

<u>Inv. affini</u>	<u>Inv. metrici</u>
$I_1(p) = \text{rg}\, A$	$I_4(p) = \text{Tr}\, A = \lambda_1 + \lambda_2$
$I_2(p) = \det A = \lambda_1 \lambda_2$	✓
$I_3(p) = \det \hat{A}$	✓

Ovvero $\det A$ e $\det \hat{A}$ sono inv. affini e metrici, la Traccia di A è inv. metrico ma <u>non</u> affine.

- Determiniamo gli invarianti nei 9 casi

$$\begin{array}{ccc} (I_1\,, & I_2\,, & I_3) \\ \shortparallel & \shortparallel & \shortparallel \\ \mathrm{rg}\,A & \det A & \det \hat{A} \end{array} \quad \mathrm{rg}\,\hat{A}$$

1) $x^2+y^2-1=0$ $\qquad (2,\ 1,\ -1)\ \ 3$

2) $x^2-y^2-1=0$ $\qquad (2,\ -1,\ 1)\ \ 3$

3) $x^2-y=0$ $\qquad (1,\ 0,\ -1)\ \ 3$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

4) $x^2+y^2+1=0$ $\qquad (2,\ 1,\ 1)\ \ 3$

5) $x^2-y^2=0$ $\qquad (2,\ -1,\ 0)\ \ 2$

6) $x^2+y^2=0$ $\qquad (2,\ 1,\ 0)\ \ 2$

7) $x^2-1=0$ $\qquad (1,\ 0,\ 0)\ \ 2$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

8) $x^2+1=0$ $\qquad (1,\ 0,\ 0)\ \ 2$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

9) $x^2=0$ $\qquad (1,\ 0,\ 0)\ \ 1$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Quindi 1) – 7) sono tutte affinemente (e quindi metricamente) distinte.

Per distinguere 7), 8), 9): si può dimostrare che se

Per distinguere 7) e 8): in entrambi i casi

$\mathrm{rg}\, A = 1$ e $\mathrm{rg}\, \hat{A} = 2$. In

7) $Sp(A) = \{1\}$ $\quad Sp(\hat{A}) = \{1, 0, -1\}$

8) $Sp(A) = \{1\}$ $\quad Sp(\hat{A}) = \{1, 0, 1\}$

$$B^t A B = A'$$

$$\underset{\text{Sylvester}}{\Rightarrow} \; sg(A) = sg(A')$$

Dimostriamo che ogni conica è affinemente equivalente ad una delle 9 coniche date.
Durante la dimostrazione vedremo anche la forma canonica metrica:
Sia $\mathcal{C}_p$ una conica associata a

$$p(X) = X^t A X + 2b \cdot X + f$$

Per il Teorema spettrale, $\exists$ B ortogonale e $D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2)$ t.c. $B^t A B = D$.
Effettuiamo il cambio di coordinate

$$X = BY$$

$$p(x) = Y^t B^t A B Y + 2b \cdot BY + f$$
$$= Y^t D Y + 2 B^t b \cdot Y + f = q(Y)$$

$$b \cdot BY = b^t BY = Y^t B^t b = Y \cdot B^t b = B^t b \cdot Y$$

ORDINIAMO gli autovalori $\lambda_1 \geq \lambda_2$.

$\underline{Es}$: $p(X) = x_1^2 + 8x_1x_2 + 7x_2^2 - 2x_1 + 8x_2 + 5$

Allora

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 4 & 7 & 4 \\ -1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$p(X) = X^t A X + 2b \cdot X + 5$$

$$P_A(x) = x^2 - 8x - 9 = (x+1)(x-9)$$

$$Sp(A) = \{\lambda_1 = 9, \lambda_2 = -1\}$$

Se λ : $\lambda^2 - 8\lambda - 9 = 0 \iff \lambda(\lambda - 8) = 9$

$$V_9(A) = Ker \begin{pmatrix} 8 & -4 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} = Ker \begin{pmatrix} 2 & -1 \end{pmatrix} = < \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} >$$

$$V_{-1}(A) = Ker \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ -4 & -8 \end{pmatrix} = Ker \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} = < \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} >$$

$$E_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad E_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \implies B = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B^t A B = D = \begin{pmatrix} 9 & \\ & -1 \end{pmatrix}; \; B^t b = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Ponendo $X = BY$ otteniamo

$$\begin{aligned} p(X) &= Y^t D Y + 2b \cdot BY + 5 \\ &= Y^t D Y + 2B^t b \cdot Y + 5 \\ &= 9y_1^2 - y_2^2 + 2\left(\frac{7}{\sqrt{5}} y_1 + \frac{6}{\sqrt{5}} y_2\right) + 5 \end{aligned}$$

$$q(Y) = 9y_1^2 - y_2^2 + \frac{14}{\sqrt{5}}y_1 + \frac{12}{\sqrt{5}}y_2 + 5$$

A questo punto dobbiamo <u>Traslare</u>.

1) completiamo i quadrati.

Proviamo a completare i quadrati:

$(ax+b)^2 = a^2 + 2abx + b^2$

$$\left(9y_1^2 + \frac{14}{\sqrt{5}}y_1\right) - \left(y_2^2 - \frac{12}{\sqrt{5}}y_2\right) + 5 =$$

$$= \left(9y_1^2 + \frac{14}{\sqrt{5}}y_1 + \left(\frac{7}{3\sqrt{5}}\right)^2\right) - \left(\frac{7}{3\sqrt{5}}\right)^2 +$$

$$- \left(y_2^2 - \frac{12}{\sqrt{5}}y_2 + \left(\frac{6}{\sqrt{5}}\right)^2\right) + \left(\frac{6}{\sqrt{5}}\right)^2 + 5 =$$

$$= \left(3y_1 + \frac{7}{3\sqrt{5}}\right)^2 - \left(y_2 - \frac{6}{\sqrt{5}}\right)^2 + \left(-\frac{49}{45} + \frac{36}{5} + 5\right)$$

$$= \left(3\left(y_1 + \frac{7}{9\sqrt{5}}\right)\right)^2 - \left(y_2 - \frac{6}{\sqrt{5}}\right)^2 + \left(\frac{500}{45}\right)$$

$$= 9\left(y_1 + \frac{7}{9\sqrt{5}}\right)^2 - \left(y_2 - \frac{6}{\sqrt{5}}\right)^2 + \frac{100}{9}$$

Poniamo

$$\begin{cases} y_1 = z_1 - \frac{7}{9\sqrt{5}} \\ y_2 = z_2 + \frac{6}{\sqrt{5}} \end{cases}$$ Traslazione

otteniamo

$$p(x) = q(Y) = 9z_1^2 - z_2^2 + \frac{100}{9} = 0$$

Moltiplichiamo per $\frac{9}{100}$ otteniamo:

$$\frac{81}{100} z_1^2 - \frac{9}{100} z_2^2 + 1 = 0$$

Moltiplichiamo per (-1),

poniamo $x = z_2$ e $y = z_1$:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

con

$$a^2 = \frac{100}{9} \qquad b^2 = \frac{100}{81}$$

quindi $\mathcal{C}_p$ è un'iperbole.

2) Siamo arrivati a

$$p(X) = q(Y) = Y^t D Y + 2B^t b \cdot Y + f$$

Cerchiamo C in maniera

da annullare il termine lineare

mediante una traslazione:

Se $Y = Z + C$ $\quad q(Y)$ diventa

$$q(Y) = (Z+C)^t D (Z+C) + 2B^t b \cdot (Z+C) + f$$

$$= Z^t D Z + 2 DC \cdot Z + C^t DC +$$

$$+ 2B^t b \cdot Z + 2B^t b \cdot C + f$$

$$= Z^t D Z + 2 (DC + B^t b) \cdot Z + q(C)$$

Consideriamo il sistema nella

variabile (vettoriale) C:

$$DC = -B^t b$$

esso è equivalente a

$$BDC = -b \qquad (\text{perché } B^{-1} = B^t)$$

che è equivalente a

$$A(BC) = -b$$

$DC = -B^t b$ ha soluzione se e solo se

$AX = -b$ ha soluzione se e solo se

$rg(A|b) = rg(A) \iff rg\,\hat{A} \leq rg\,A + 1$

$\hat{A} = \begin{pmatrix} A & b \\ b^t & f \end{pmatrix}$

Una soluzione di $DC = B^t b$

si dice <u>centro</u> della conica $\mathcal{C}_q$:

$\mathcal{C}_p$ è a centro $\iff rg(\hat{A}) \leq rg\,A + 1$

Se $AX = b$ non ha soluzione

allora $\mathcal{C}_p$ non è a centro.

$\mathcal{C}_p$ <u>non</u> è a centro $\iff rg\,\hat{A} = rg\,A + 2$

1) <u>Coniche a centro</u>:

Sia C una soluzione di $DC = -B^t b$.

Poniamo $Y = Z + C$. Otteniamo

$$p(x) = Z^t D Z + q(c)$$

$$= \lambda_1 z_1^2 + \lambda_2 z_2^2 + q(c)$$

OSS: Chi è $q(C)$?

$$q(C) = C^t D C + 2B^t b \cdot C + f \overset{B^t b = -DC}{=} -C^t D C + f$$

Osserviamo che

$$\det \hat{A} = \det \left(\begin{array}{c|c} A & b \\ \hline b^t & f \end{array} \right) = \det \left(\begin{array}{c|c} BDB^t & b \\ \hline b^t & f \end{array} \right)$$

$b = -BDC$

$$= \det \left(\begin{array}{c|c} BDB^t & -BDC \\ \hline -(BDC)^t & f \end{array} \right)$$

$$= \det \left(\left(\begin{array}{c|c} B & 0 \\ \hline -C^t & 1 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} DB^t & -DC \\ \hline 0 & -C^t DC + f \end{array} \right) \right)$$

$$= \det(B) \det(DB^t)\, q(C)$$

$$= \det(A)\, q(C)$$

Quindi

$$\boxed{\det \hat{A} = \det(A)\, q(C).}$$

In particolare, se $\det(A) \neq 0$, otteniamo che una conica a centro $\mathcal{C}_P$ è metricamente equivalente a

$$\boxed{\lambda_1 z_1^2 + \lambda_2 z_2^2 + \frac{\det(\hat{A})}{\det(A)} = 0}$$

dove $Sp(A) = \{\lambda_1, \lambda_2\}$.

Osserviamo inoltre che se C è un centro di $\mathcal{C}_p$ allora

$$\boxed{q(C)=0 \iff rg(\hat{A}) = rg A}$$

Infatti,

$\Rightarrow)$ $q(C)=0 \iff -C^t D C + f = 0$

$$\iff f = C^t D C = -C^t B^t b$$
$$= -b^t (BC)$$

$$\iff \begin{cases} A(BC) = -b & \text{[Perché C è un centro]} \\ b^t(BC) = -f \end{cases}$$

$\iff$ l'ultima colonna di

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} A & b \\ b^t & f \end{pmatrix}$$

è combinazione lineare delle prime due colonne

$$\iff rg A = rg \begin{pmatrix} A \\ b^t \end{pmatrix}$$

$b \in Col(A)$

$b^t \in Row(A^t) = Row(A)$

$A = A^t$

Caso 1) $q(c)=0$.

In questo caso $\mathcal{C}_P$ è metricamente eq. a

$$\lambda_1 z_1^2 + \lambda_2 z_2^2 = 0$$

Se $\lambda_1\lambda_2 \neq 0$, poniamo

$$z_1 = \frac{1}{\sqrt{|\lambda_1|}}x \quad , \quad z_2 = \frac{1}{\sqrt{|\lambda_2|}}y$$

e otteniamo

$$x^2 \pm y^2 = 0$$

ovvero le coniche (5) e (6)

Se $\lambda_1\lambda_2 = 0$, diciamo $\lambda_1 \neq 0$ e $\lambda_2 = 0$,

poniamo

$$z_1 = \frac{1}{\sqrt{|\lambda_1|}}x \quad , \quad z_2 = y$$

e otteniamo

$$x^2 = 0$$

ovvero la conica (9).

Caso 2) $q(c) \neq 0$.

Quindi, $rg\,\hat{A} \leq rg\,A + 1$ ma $rg(\hat{A}) \neq rg\,A$.

<u>caso 1)</u> $\boxed{rg\,A = 2} \Rightarrow rg\,\hat{A} = 3$.

$\det A \neq 0$ ovvero $\lambda_1 \lambda_2 \neq 0$.

A meno di scambiare gli autovettori, possiamo assumere $\lambda_1 \geq \lambda_2$.

In questo caso, $\mathcal{C}_P$ è metricamente eq. a

$$\lambda_1 z_1^2 + \lambda_2 z_2^2 + q(c) = 0$$

dividendo per $|q(c)|$ otteniamo

$$\frac{\lambda_1}{|q(c)|} z_1^2 + \frac{\lambda_2}{|q(c)|} z_2^2 \pm 1 = 0$$

Per ottenere la forma canonica affine dobbiamo studiare i segni di λ_1 e λ_2. A meno di moltiplicare per (-1) possiamo assumere $\lambda_1 > 0$.

Poniamo

$$z_1 = \sqrt{\frac{|q(c)|}{|\lambda_1|}}\, x \quad , \quad z_2 = \sqrt{\frac{|q(c)|}{|\lambda_2|}}\, y$$

e otteniamo

$$x^2 \pm y^2 \pm 1 = 0$$

Se $\lambda_2 > 0$ e $q(c) > 0$

$x^2 + y^2 + 1 = 0$ [Ellisse Immaginaria] (4)

Se $\lambda_2 > 0$ e $q(c) < 0$

$x^2 + y^2 - 1 = 0$ [Ellisse reale] (1)

Se $\lambda_2 < 0$ e $q(c) > 0$

$$x^2 - y^2 + 1 = 0$$

Moltiplichiamo per (-1), scambiamo x e y:

$x^2 - y^2 - 1 = 0$ [Iperbole] (2)

Se $\lambda_2 < 0$ e $q(c) < 0$

$x^2 - y^2 - 1 = 0$ [Iperbole] (2)

Caso 2) $\boxed{rg A = 1} \Rightarrow rg \hat{A} = 2$

In questo caso $\lambda_1 \lambda_2 = 0$.

A meno di uno scambio di variabili e di moltiplicare per (-1) possiamo assumere $\lambda_1 > 0$ e $\lambda_2 = 0$.

In questo caso $\mathcal{C}_p$ è metricamente equivalente a

$$\frac{\lambda_1}{|q(c)|} z_1^2 \pm 1 = 0$$

Poniamo

$$z_1 = \sqrt{\frac{|q(c)|}{\lambda_1}}\, x \,, \quad z_2 = y$$

e otteniamo:

- se $q(c) > 0$

  $x^2 + 1 = 0$ [rette imm. incidenti] (8)

- se $q(c) < 0$

  $x^2 - 1 = 0$ [rette reali incidenti] (7)

Coniche non a centro

Dimostriamo che se $\mathcal{C}_p$ è una conica non a centro allora è affinemente equivalente ad una parabola di equazione

$$(3) \quad x^2 - y = 0$$

Sia

$$p(x) = x^t A x + 2b \cdot x + f$$

t.c. $\operatorname{rg} \hat{A} = \operatorname{rg} A + 2$ quindi

$$\operatorname{rg} \hat{A} = 3 \quad e \quad \operatorname{rg} A = 1.$$

In particolare, uno dei due autovalori $\{\lambda_1, \lambda_2\}$ di A è zero.

Possiamo supporre $\lambda_1 \neq 0$ e $\lambda_2 = 0$.

Sia B ortogonale t.c.

$$B^t A B = D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Effettuiamo il cambiamento di coordinate

$X = BY$ e otteniamo

$$p(X) = Y^t D Y + 2 B^t b \cdot Y + f = q(Y)$$

Ponendo $Y = Z + C$ si ottene

$$p(X) = q(Y) = Z^t D Z + 2 (DC + B^t b) \cdot Z + q(C)$$

Dato che per ipotesi p non é a centro, il sistema $DC + B^t b = 0_{\mathbb{R}^2}$ non ha soluzione. Notiamo che esso é

$$\begin{cases} \lambda_1 c_1 = -e_1 \\ 0 = e_2 \neq 0 \end{cases}$$

dove $\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} = B^t b$. Scegliamo $c_1 = -\frac{e_1}{\lambda_1}$ e otteniamo

$$p(X) = q(Y) = \lambda_1 z_1^2 + 2 e_2 z_2 + q(C)$$

Notiamo che

$$q(C) = \lambda_1 c_1^2 + 2 e_1 c_1 + 2 e_2 c_2 + f$$
$$= \lambda_1 \left(\frac{e_1}{\lambda_1} \right)^2 - 2 \frac{e_1^2}{\lambda_1} + 2 e_2 c_2 + f$$

$$q(C) = 0 \iff c_2 = \frac{1}{2e_2} \left(\frac{e_1^2}{2\lambda_1} - f \right)$$

Scegliamo tale c_2, e otteniamo che la traslazione $Y = Z + C$ trasforma $q(Y) = 0$

$$\lambda_1 z_1^2 + 2 e_2 z_2 = 0$$

Dividendo per λ_1 otteniamo che e_p è metricamente equivalente a

$$z_1^2 + 2 \frac{e_2}{\lambda_1} z_2 = 0$$

Effettuando il cambiamento di coordinate affini

$$z_1 = x$$

$$z_2 = -\frac{|\lambda_1|}{2|e_2|} y$$

otteniamo

$$x^2 - y = 0 \qquad \text{[parabola] (3).}$$

<u>Es</u>: Ridurre a forma canonica metrica e affine la conica $\mathcal{C}_p$ dove

$$p(x_1, x_2) = 5x_1^2 + 5x_2^2 - 6x_1x_2 + 16\sqrt{2}\,x_1 + 32$$

specificando i cambiamenti di coordinate.

<u>Sol.</u>:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 8\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{A} = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 8\sqrt{2} \\ -3 & 5 & 0 \\ 8\sqrt{2} & 0 & 32 \end{pmatrix}$$

$$\det A = 25 - 9 = 16 \neq 0 \Rightarrow \operatorname{rg} A = 2$$

$\Rightarrow \mathcal{C}_p$ è a centro, con un unico centro.

Il centro è l'unica soluzione C di

$$AC = -b \iff C = -A^{-1}b$$

$$\iff C = -\frac{1}{16}\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 8\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{16}\begin{pmatrix} 40\sqrt{2} \\ 24\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$= -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 5\sqrt{2} \\ 3\sqrt{2} \end{pmatrix} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\det \hat{A} = 8\sqrt{2}\left(-40\sqrt{2}\right) + 32(25 - 9)$$

$$= -640 + 512 = -128$$

$$p(c) = \frac{\det \hat{A}}{\det A} = -\frac{128}{16} = -8$$

$$P_A(x) = x^2 - 10x + 16 = (x-8)(x-2)$$

$$x_{1,2} = \frac{10 \pm \sqrt{100-64}}{2} = \frac{10 \pm \sqrt{36}}{2} = 5 \pm 3$$

$\Rightarrow Sp(A) = \{2, 8\}$.

Quindi $\mathcal{C}_P$ è metricamente equivalente all'ellisse

$$2z_1^2 + 8z_2^2 - 8 = 0$$

ovvero

$$\frac{z_1^2}{4} + z_2^2 - 1 = 0$$

e quindi è affinemente equivalente a

$$x^2 + y^2 - 1.$$

Evidenziamo adesso i cambiamenti di coordinate

$$V_2(A) = \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$V_8(A) = \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle .$$

Poniamo

$$B = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

cosicché B è ortogonale e

$$B^t A B = D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

Poniamo $X = BY$: $\qquad DC = -B^t b = -\begin{pmatrix} 8 \\ 8 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} y_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} y_2 \\ x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} y_1 - \frac{1}{\sqrt{2}} y_2 \end{cases}$$

e otteniamo

$$p(X) = Y^t D Y + 2 B^t b \cdot Y + f$$

$$B^t b = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 8\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow p(X) = 2y_1^2 + 8y_2^2 + 16y_1 + 16y_2 + 32$$

$$= 2\left(y_1^2 + 8y_1 + (4)^2\right) - 32 + 8\left(y_2^2 + 2y_2 + 1\right) - 8 + 32$$

$$= 2(y_1+4)^2 + 8(y_2+1)^2 - 8$$

Poniamo

$$\begin{cases} y_1 = z_1 - 4 \\ y_2 = z_2 - 1 \end{cases}$$

e otteniamo che $\mathcal{C}_p$ è metricamente equivalente a

$$2z_1^2 + 8z_2^2 - 8 = 0$$

<u>OSS</u>: Il punto $C' = \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \end{pmatrix}$ è il centro di $q(Y)$. Il centro di $p(X)$ è

$$C = BC' = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -5 \\ -3 \end{pmatrix}$$

come già trovato.

Dividiamo per 8 e troviamo che $\mathcal{C}_p$ è <u>metric. equiv.</u> a

$$\boxed{\frac{z_1^2}{4} + z_2^2 - 1 = 0}$$ Forma canonica metrica di $\mathcal{C}_p$

Effettuiamo il cambiamento affine

$$\begin{cases} z_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} x \\ z_2 = \frac{1}{\sqrt{8}} y \end{cases}$$

e otteniamo che $\mathcal{C}_p$ è affin. equivalente a

$$\boxed{x^2 + y^2 - 1}$$ Forma canonica affine di $\mathcal{C}_p$