

Diagonalizzazione

Def: Un endomorfismo lineare

$$\mathcal{L}: V \rightarrow V$$

si dice diagonalizzabile se esiste

una base $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ di V

nella quale la matrice che rappresenta

\mathcal{L} è diagonale $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\mathcal{L}} & V \\ \downarrow F_{\mathcal{B}} & & \downarrow F_{\mathcal{B}} \\ K^n & \xrightarrow{D} & V \end{array}$$

ovvero

$$\boxed{\mathcal{L}(v_i) = \lambda_i v_i} \quad \forall i = 1, \dots, n.$$

In tal caso \mathcal{B} si dice una base diagonalizzante per \mathcal{L} .

Oss: Se $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ è una base diagonalizzante allora

$$\mathcal{L}(\langle v_i \rangle) \subseteq \langle v_i \rangle$$

ovvero le n rette $\langle v_1 \rangle, \dots, \langle v_n \rangle$ sono fissate da \mathcal{L} (ma non puntualmente!):

$$\mathcal{L}(tv_i) = t \mathcal{L}(v_i) = t \lambda_i v_i = \lambda_i (tv_i) \in \langle v_i \rangle.$$

È vale anche il viceversa: se $\dim V = n$

e $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$ sono rette di V t.c.

$$1) \tau_i \cap \tau_j = \{0_V\} \quad \forall i \neq j$$

$$2) \mathcal{L}(\tau_i) \subseteq \tau_i$$

allora \mathcal{L} è diagonalizzabile: infatti

$$\tau_i = \langle v_i \rangle$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}(v_i) = \lambda_i v_i \quad \text{per qualche } \lambda_i \in \mathbb{K}$$

e la condizione 1) ci dice che

$$\{v_1, \dots, v_n\} \text{ è lin. Ind.}$$

Le rette $\langle v_1 \rangle, \dots, \langle v_n \rangle$ si dicono assi di simmetria di \mathcal{L}

^s Non-esempio: Una rotazione

$$R_\theta: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

del piano è diagonalizzabile se e solo se ha due rette fissate

$$\Leftrightarrow \theta = 0 \text{ o } \theta = \pi \Leftrightarrow R_\theta = \pm \text{Id}_{\mathbb{R}^2}$$

Esempio: la riflessione

$$Q_m: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

rispetto alla retta $y = mx$ è

diagonalizzabile per ogni m . Infatti

fisse le rette

$$r_1: y = mx \quad r_1 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$r_2 = r_1^\perp: x = -my \quad r_2 = \left\langle \begin{pmatrix} -m \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Si noti che r_1 è fissata puntualmente

$$\text{ovvero } Q_m(v) = v \quad \forall v \in r_1$$

mentre r_2 non è fissata puntualmente:

$$Q_m(w) = -w \quad \forall w \in r_2.$$

Def: Una matrice $A \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{K})$ è diagonalizzabile su \mathbb{K} se

$S_A: \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n$ è diagonalizzabile

ovvero se $\exists B = \{v_1, \dots, v_n\}$ base di \mathbb{K}^n

tale che la matrice che rappresenta

S_A in B è una matrice

diagonale $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K}^n & \xrightarrow{A} & \mathbb{K}^n \\ \downarrow F_B = S_B^{-1} & & \downarrow F_B = S_B^{-1} \\ \mathbb{K}^n & \xrightarrow{D} & \mathbb{K}^n \end{array}$$

dove $B = (v_1 | \dots | v_n) \in \text{Mat}_{n \times n}$ (invertibile)

Questo vuol dire che

$$B^{-1}AB = D$$

$$\Leftrightarrow AB = DB$$

$$\Leftrightarrow Av_i = \lambda_i v_i \quad \forall i = 1, \dots, n.$$

Autovalori e autovettori

Def: Un autovettore di un endomorfismo lineare di V

$$\mathcal{L}: V \rightarrow V$$

è un vettore non-nullo $v \in V \setminus \{0_V\}$ t.c. esiste $\lambda \in \mathbb{K}$ tale che

$$\mathcal{L}(v) = \lambda v.$$

In tal caso il numero $\lambda \in \mathbb{K}$ si dice l'autovalore corrispondente all'autovettore v .

Riformulando: $\mathcal{L}: V \rightarrow V$ è diagonalizzabile se esiste una base di V composta di autovettori per \mathcal{L} .

Def: Un autovettore di autovalore
 $\lambda \in \mathbb{K}$ di una matrice $A \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{K})$
è un vettore non-nullo $X \in \mathbb{K}^n \setminus \{0_{\mathbb{K}^n}\}$
tale che

$$AX = \lambda X.$$

Es: Se $U = \begin{pmatrix} u_{11} & * & \dots & * \\ 0 & u_{22} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & u_{nn} \end{pmatrix} \in \text{Mat}_{n \times n}$
è triangolare superiore allora

$$Ue_1 = \begin{pmatrix} u_{11} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = u_{11} e_1$$

e_1 è un autovettore per U
di autovalore u_{11} .

Es: $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ non

ha autovettori in \mathbb{R}^2 se $\theta \neq 0$ e $\theta \neq \pi$.

Se $\theta = 0$, $R_0 = \mathbb{1}_2$ e ogni $X \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$
è un autovettore di autovalore 1.

Se $\theta = \pi$, $R_\pi = -\mathbb{1}_2$ e ogni $X \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0_{\mathbb{R}^2}\}$
è un autovettore di autovalore -1.

Quindi, non è vero che ogni matrice $n \times n$ ammette un autovettore in \mathbb{K}^n (ad es. \mathbb{R}).

Desideriamo sapere sotto quali ipotesi una matrice $A \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{K})$ ammetta un autovettore in \mathbb{K}^n : vediamo cosa vuol dire essere un autovettore di autovalore λ :

$v \neq 0_{\mathbb{K}^n}$ è autovettore di autovalore λ per A

$$\text{se } Av = \lambda v$$

$$\Leftrightarrow \lambda v - Av = 0_{\mathbb{K}^n}$$

$$\Leftrightarrow (\lambda \mathbb{1}_n - A)v = 0_{\mathbb{K}^n}$$

$$\Leftrightarrow v \in \text{Ker}(\lambda \mathbb{1}_n - A)$$

$$\Leftrightarrow \text{Ker}(\lambda \mathbb{1}_n - A) \neq \{0_{\mathbb{K}^n}\}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\det(\lambda \mathbb{1}_n - A) = 0}$$

Studiamo

$$p_A(x) := \det(x \mathbb{1}_n - A)$$

dove $x \in \mathbb{K}$ in qualche esempio

$$\underline{\text{Es}}: A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$p_A(x) = \det \left(\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \right)$$

$$= \det \begin{pmatrix} x-1 & -3 \\ 0 & x-2 \end{pmatrix} = (x-1)(x-2)$$

$$= x^2 - 3x + 2$$

$$\underline{\text{Es}}: A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$p_A(x) = \det \begin{pmatrix} x-a & -b \\ -c & x-d \end{pmatrix}$$

$$= (x-a)(x-d) - bc$$

$$= x^2 - (a+d)x + (ad-bc)$$

$$= x^2 - \text{Tr}(A)x + \det(A)$$

è un polinomio monico
di grado 2.

$$\underline{\text{Es:}} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$P_A(x) = \det \begin{pmatrix} x-1 & -2 & -1 \\ 0 & x-2 & -2 \\ 0 & -4 & x-3 \end{pmatrix}$$

$$= (x-1) \det \begin{pmatrix} x-2 & -2 \\ -4 & x-3 \end{pmatrix}$$

$$= (x-1) \left(\underbrace{x^2 - 5x - 2}_{\text{Tr} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}} - \underbrace{4}_{\det \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}} \right)$$

$$= x^3 - 5x^2 - 2x - x^2 + 5x + 2$$

$$= x^3 - 6x^2 + 3x + 2$$

è un polinomio monico di grado 3.

$$\underline{E}_3 = A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \in \text{Mat}_{3 \times 3}$$

$$P_A(x) = \det \begin{pmatrix} x - a_{11} & -a_{12} & -a_{13} \\ -a_{21} & x - a_{22} & -a_{23} \\ -a_{31} & -a_{32} & x - a_{33} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} &= (x - a_{11}) \left[(x - a_{22})(x - a_{33}) - a_{32} a_{23} \right] + \\ &+ a_{21} \left(-a_{12}(x - a_{33}) - a_{13} a_{32} \right) \\ &- a_{31} \left(a_{12} a_{23} + a_{13}(x - a_{22}) \right) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\equiv \left(x^2 - (a_{11} + a_{22})x + a_{11} a_{22} \right) (x - a_{33}) - a_{32} a_{23} (x - a_{11}) \\ &- a_{12} a_{21} (x - a_{33}) - a_{13} a_{32} a_{21} - a_{12} a_{23} a_{31} + \\ &- a_{31} a_{13} (x - a_{22}) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \underline{x^3} - \underline{a_{33} x^2} - \underline{(a_{11} + a_{22}) x^2} + \underline{(a_{11} + a_{22}) a_{33}} + \\ &+ \underline{a_{11} a_{22} x} - \underline{a_{11} a_{22} a_{33}} - \underline{a_{32} a_{23} x} + \underline{a_{11} a_{23} a_{32}} \\ &- \underline{a_{12} a_{21} x} + \underline{a_{12} a_{21} a_{33}} - \underline{a_{13} a_{32} a_{21}} - \underline{a_{12} a_{23} a_{31}} \\ &- \underline{a_{31} a_{13} x} + \underline{a_{31} a_{13} a_{22}} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \underline{x^3} - \underline{\text{tr} A} x^2 + \left[\underline{a_{11} a_{22}} + \underline{a_{11} a_{33}} + \underline{a_{22} a_{33}} + \right. \\ &\quad \left. - \underline{a_{12} a_{21}} - \underline{a_{13} a_{31}} - \underline{a_{23} a_{32}} \right] x - \det A \end{aligned}$$

Chi è il coefficiente di x ?

DSS: Se $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ allora

$$\begin{aligned} & a_{11}a_{22} + a_{11}a_{33} + a_{22}a_{33} - a_{12}a_{21} - a_{13}a_{31} - a_{23}a_{32} \\ &= \frac{1}{2} [\text{Tr}(A)^2 - \text{Tr}(A^2)] \end{aligned}$$

$$\text{Tr}(A) = a_{11} + a_{22} + a_{33}$$

$$\begin{aligned} \text{Tr}(A)^2 &= \underline{a_{11}^2} + \underline{a_{22}^2} + \underline{a_{33}^2} + 2a_{11}a_{22} + 2a_{11}a_{33} + \\ &+ 2a_{22}a_{33} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Tr}(A^2) &= \underline{a_{11}^2} + a_{12}a_{21} + a_{13}a_{31} + \\ &+ a_{21}a_{12} + \underline{a_{22}^2} + a_{23}a_{32} + \\ &+ a_{31}a_{13} + a_{32}a_{23} + \underline{a_{33}^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Tr}(A)^2 - \text{Tr}(A^2) &= 2a_{11}a_{22} + 2a_{11}a_{33} + 2a_{22}a_{33} \\ &- 2a_{12}a_{21} - 2a_{13}a_{31} - 2a_{23}a_{32} \end{aligned}$$

$$= 2 [a_{11}a_{22} + a_{11}a_{33} + a_{22}a_{33} - a_{12}a_{21} - a_{13}a_{31} - a_{23}a_{32}]$$

▣

Prop. : Se $K = \mathbb{Q}, \mathbb{R} \text{ o } \mathbb{C}$.

Se $A \in \text{Mat}_{3 \times 3}(K)$ allora

$$\begin{aligned} P_A(x) &= \det(x \mathbb{1}_3 - A) \\ &= x^3 - \text{Tr}(A)x^2 + \frac{1}{2} [\text{Tr}(A)^2 - \text{Tr}(A^2)]x - \det A. \end{aligned}$$

Es : $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

$$\det A = \det \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -5 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = -5(3+1) = -20$$

$$\text{Tr} A = 5 \Rightarrow (\text{Tr} A)^2 = 25$$

$$\begin{aligned} \text{Tr}(A^2) &= (1+6-1) + (6+1+4) + (-1+4+9) \\ &= 6 + 11 + 12 = 29 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_A(x) &= x^3 - 5x^2 + \frac{1}{2}(-4)x + 20 \\ &= x^3 - 5x^2 - 2x + 20. \end{aligned}$$

Se $A \in \text{Mat}_{n \times n}(K)$ allora

$$P_A(x) = \det(x \mathbb{1}_n - A)$$

è un polinomio monico di grado n della forma

$$P_A(x) = x^n - \text{tr}(A)x^{n-1} + \dots + (-1)^n \det A$$

Esso si chiama il polinomio caratteristico di A .

Abbiamo dimostrato:

// Se $\exists \lambda \in K$ t.c. $P_A(\lambda) = 0$ allora
// $\exists v \in K^n \setminus \{0_{K^n}\}$ t.c. $Av = \lambda v$

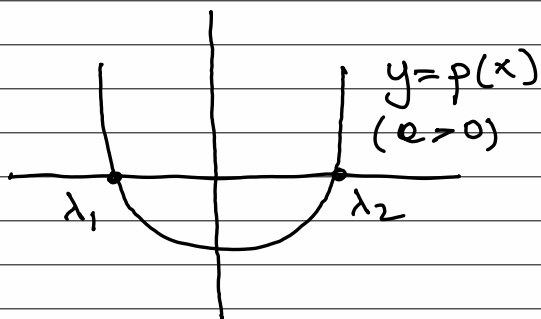
Ricordiamo che se $p \in K[x]$, un numero $\lambda \in K$ tale che $p(\lambda) = 0$ si dice una radice o uno zero di $p(x)$.

Es: $p(x) = ax^2 + bx + c$

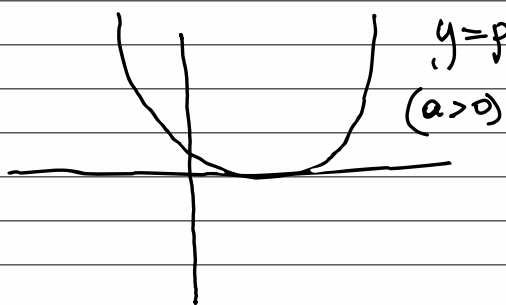
Le radici di p sono

$$\lambda_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

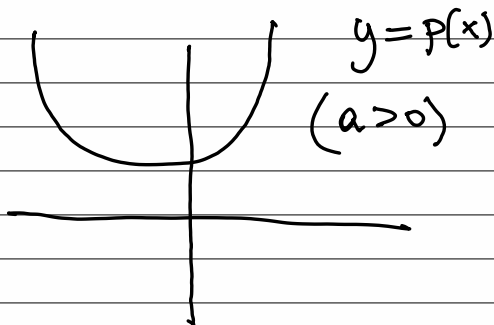
$\Delta = b^2 - 4ac$ si dice il discriminante di p



$\Delta > 0$:
2 radici reali
distinte

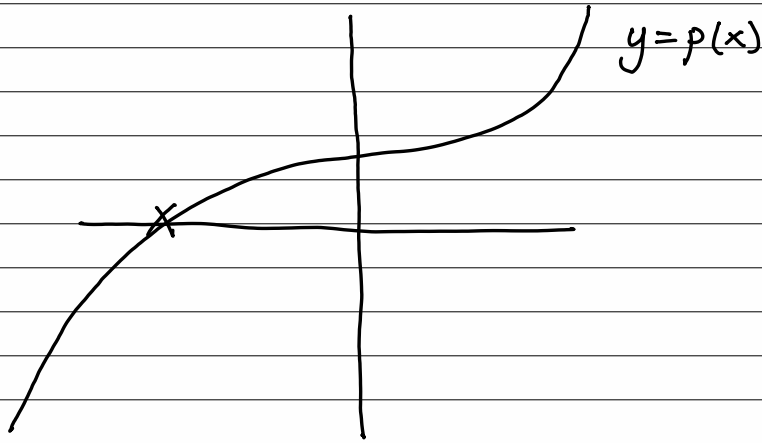


$\Delta = 0$
2 radici reali
coincidenti



$\Delta < 0$
2 radici complesse
distinte
 $\lambda_{1,2} = \frac{-b \pm i\sqrt{|\Delta|}}{2a}$

oss: Un polinomio di grado 3
ha almeno una radice reale



Teorema (Fondamentale dell'algebra)

Sia $p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0 \in \mathbb{C}[x]$

Allora $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{C}$ distinti e

$m_1, \dots, m_k \in \mathbb{N}$ t. c.

$$p(x) = (x - \lambda_1)^{m_1} (x - \lambda_2)^{m_2} \dots (x - \lambda_k)^{m_k}$$

Il numero naturale m_i si dice
la molteplicità algebrica della
radice λ_i (per ogni $i=1, \dots, k$).

Quindi "un polinomio $p \in \mathbb{C}[x]$ di grado n ha n radici complesse se contate con la loro molteplicità (algebraica)"

Es: Cerchiamo le radici di $P_{R_\theta}(x)$
per $\theta \neq 0, \pi$: $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} P_{R_\theta}(x) &= x^2 - 2\cos\theta x + 1 \\ &= (x - \lambda_1)(x - \lambda_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2} &= \cos\theta \pm \sqrt{\cos^2\theta - 1} \\ &= \cos\theta \pm i \sin\theta \end{aligned}$$

Quindi R_θ ha due autovalori distinti se $\theta \neq 0, \pi$, entrambi con molteplicità algebrica 1.

OSS: Se $P_A(x)$ ha una radice complessa non-reale, allora

A non è diagonalizzabile su \mathbb{R} :

infatti se $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ è t.c. $P_A(\lambda) = 0$

allora $X \in \text{Ker}(\lambda \mathbb{1}_n - A)$

$$\Leftrightarrow \underline{A}X = \lambda \mathbb{1}_n \in \mathbb{C}^n$$

$\Rightarrow X \in \mathbb{C}^n$. Quindi A non ha
 $A \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R})$

un autovettore

reale di autovettore λ .

In altre parole se

$$B^{-1}AB = D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

allora $\lambda = \lambda_i$ per qualche i

e quindi $B \notin \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R})$.

Prop: Il polinomio caratteristico è invariante per similitudine, ovvero

$$P_{B^{-1}AB}(x) = P_A(x)$$

dim :

$$\begin{aligned} P_{B^{-1}AB}(x) &= \det(x \mathbb{1}_n - B^{-1}AB) \\ &= \det(x B^{-1}B - B^{-1}AB) \\ &= \det(B^{-1}(x \mathbb{1}_n - A)B) \\ &= \det(B)^{-1} P_A(x) \det(B) \\ &= P_A(x). \quad \square \end{aligned}$$

Lo spettro di una matrice

Sia $A \in \text{Mat}_{m \times m}(\mathbb{K})$. Lo spettro di A è l'insieme dei suoi autovalori.

$$\text{Sp}(A) = \{ \lambda \mid p_A(\lambda) = 0 \}$$

In genere, questi autovalori non appartengono al campo \mathbb{K} .

Allora denotiamo con

$$\text{Sp}(A)_{\mathbb{K}} = \{ \lambda \in \mathbb{K} \mid p_A(\lambda) = 0 \}.$$

Se $A \in \text{Mat}_{m \times m}(\mathbb{R})$ allora il suo spettro è

$$\text{Sp}(A) = \{ \lambda \in \mathbb{C} \mid p_A(\lambda) = 0 \}$$

e il suo spettro reale è

$$\text{Sp}(A)_{\mathbb{R}} = \{ \lambda \in \mathbb{R} \mid p_A(\lambda) = 0 \} \subseteq \text{Sp}(A).$$

Per il Teorema fondamentale dell'algebra

$$|\text{Sp}(A)_{\mathbb{R}}| \leq |\text{Sp}(A)| \leq m.$$

Molteplicità geometrica di un autovalore

Sia $A \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{K})$. Sia $\lambda \in \text{Sp}(A)_{\mathbb{K}}$.

Allora il sottospazio vettoriale

$$\text{Ker}(\lambda \mathbb{1}_n - A) \subseteq \mathbb{K}^n$$

è non-nullo e si chiama

l'auto spazio di A corrispondente all'autovalore $\lambda \in \mathbb{K}$.

Notazione:

$$V_{\lambda}(A) := \text{Ker}(\lambda \mathbb{1}_n - A)$$

Si noti che

$$V_{\lambda}(A) \neq \{0_{\mathbb{K}^n}\} \Leftrightarrow \lambda \in \text{Sp}(A)_{\mathbb{K}}$$

I vettori non-nulli di $V_{\lambda}(A)$

sono tutti e soli gli autovettori

di autovalore λ per A .

Def: La molteplicità geometrica di $\lambda \in Sp(A)_{\mathbb{K}}$ è la dimensione di $V_{\lambda}(A)$ e si denota con $mg(\lambda)$:

$$\boxed{mg_A(\lambda) = \dim V_{\lambda}(A)}$$

Denotiamo la molteplicità algebrica di λ con $\boxed{ma_A(\lambda)}$

Es: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$P_A(x) = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$$

$$\Rightarrow Sp(A)_{\mathbb{R}} = \{1\}$$

$$ma_A(1) = 2$$

$$mg_A(1) = \dim \text{Ker} (\mathbb{1}_2 - A)$$

$$= \dim \text{Ker} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= 1$$

Prop. : Per ogni $\lambda \in \text{Sp}(A)_{\mathbb{K}}$ si ha

$$\text{mg}_A(\lambda) \leq \text{ma}_A(\lambda)$$

dim :

Sia $\{v_1, \dots, v_k\}$ una base di $V_\lambda(A)$

(quindi $k = \text{mg}_A(\lambda)$) e

$$Av_i = \lambda v_i \quad \forall i=1, \dots, k$$

estendiamo la ad una base di \mathbb{K}^n

$$B = \{v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_n\}$$

la matrice che rappresenta S_A

nella base B è

$$C = \begin{pmatrix} \lambda \mathbb{1}_k & L \\ 0 & M \end{pmatrix}$$

per qualche $M \in \text{Mat}_{(n-k) \times (n-k)}$ e $L \in \text{Mat}_{k \times (n-k)}$.

Quindi se $B = (v_1 | \dots | v_n)$, allora

$C = B^{-1}AB$. Si ha

$$P_A(x) = P_C(x) = (x-\lambda)^k P_M(x)$$

$$\Rightarrow k \leq \text{ma}_A(\lambda). \quad \square$$

Teorema :

$A \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{K})$ è diagonalizzabile su \mathbb{K}
se e solo se

1) $\text{Sp}(A) = \text{Sp}(A)_{\mathbb{K}} \subseteq \mathbb{K}$ e

2) $\text{mg}(\lambda) = \text{ma}(\lambda) \quad \forall \lambda \in \text{Sp}(A)$.

dim :

\Rightarrow) Se A è diagonalizzabile su \mathbb{K}
allora $\exists B \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{K})$ invertibile
tale che $B^{-1}AB = D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$

$\Rightarrow D \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{K}) \Rightarrow \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$

$\Rightarrow \text{Sp}(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\} \subseteq \mathbb{K}$.

Inoltre, $\forall \lambda \in \text{Sp}(A)$

$$V_{\lambda}(A) = \dim \text{Ker}(\lambda \mathbb{1}_n - A)$$

$$= \dim \text{Ker}(\lambda \mathbb{1}_n - BDB^{-1})$$

$$= \dim \text{Ker}(B(\lambda \mathbb{1}_n - D)B^{-1})$$

$$= n - \text{rg}(B(\lambda \mathbb{1}_n - D)B^{-1})$$

Osserviamo che

$$\operatorname{rg}(BCB^{-1}) = \operatorname{rg}(C)$$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \xrightarrow{BCB^{-1}} & \mathbb{R}^n \\ \downarrow F_B & & \downarrow F_B \\ \mathbb{R}^n & \xrightarrow{C} & \mathbb{R}^n \end{array}$$

Quindi

$$\operatorname{mg}_A(\lambda) = \dim V_\lambda(A) = \dim V_\lambda(D) = \operatorname{mg}_D(\lambda)$$

Dato che

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

è diagonale, $De_i = \lambda_i e_i$ e quindi

$$\operatorname{mg}_D(\lambda) = \#\{i \mid \lambda_i = \lambda\} = m_a(\lambda).$$

Viceversa, supponiamo che

$$\text{Sp}(A) \subset \mathbb{K} \quad \text{e} \quad m_{\mathbb{K}}(\lambda) = m_{\mathbb{A}}(\lambda)$$

e dimostriamo che A è diagonalizzabile.

Siano $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_k$ gli autovalori distinti di A . Chiaramente

$$V_{\lambda_i}(A) \cap V_{\lambda_j}(A) = \{0_{\mathbb{R}^n}\} \quad \text{se} \quad \lambda_i \neq \lambda_j$$

(Infatti se $v \in V_{\lambda_i}(A) = V_{\lambda_j}(A)$ allora

$$\lambda_j v = Av = \lambda_i v \Rightarrow (\lambda_j - \lambda_i)v = 0_{\mathbb{K}^n}$$

$$\Rightarrow v = 0_{\mathbb{K}^n}.)$$

$\lambda_i \neq \lambda_j$

Consideriamo il sottospazio

$$W = V_{\lambda_1}(A) \oplus \dots \oplus V_{\lambda_k}(A)$$

$$\dim W = m_{\mathbb{A}}(\lambda_1) + \dots + m_{\mathbb{A}}(\lambda_k)$$

$$= m_{\mathbb{A}}(\lambda_1) + \dots + m_{\mathbb{A}}(\lambda_k) = n$$

$$\Rightarrow W = \mathbb{K}^n.$$

Scegliamo una base \mathcal{B}_i di $V_{\lambda_i}(A) \forall i$.

$\Rightarrow \mathcal{B} = \mathcal{B}_{\lambda_1} \cup \dots \cup \mathcal{B}_{\lambda_k}$ è una base

di \mathbb{K}^n composta di autovettori per A . \square

Es: Una matrice Triangolare superiore

$$U = \begin{pmatrix} u_{11} & * & \dots & * \\ 0 & u_{22} & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & u_{nn} \end{pmatrix} \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{K})$$

ha come autovalori gli el. diagonali

$$Sp(U) = \{u_{11}, u_{22}, \dots, u_{nn}\} \subset \mathbb{K}$$

infatti

$$P_U(x) = \det \begin{pmatrix} x - u_{11} & * & \dots & * \\ 0 & x - u_{22} & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & x - u_{nn} \end{pmatrix}$$

$$= (x - u_{11})(x - u_{22}) \dots (x - u_{nn})$$

$ma_U(u_{ii}) = \#$ volte che u_{ii}

compare sulla diagonale di U .

Se questi elementi diagonali

sono tutti distinti allora

$$ma_U(u_{ii}) = 1 \quad \forall i = 1, \dots, n$$

$$\Rightarrow 1 \leq mg_U(u_{ii}) \leq ma_U(u_{ii}) = 1$$

$$\Rightarrow mg_U(u_{ii}) = ma_U(u_{ii})$$

$\Rightarrow U$ è diagonalizzabile su \mathbb{K} .

COR: Se $A \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{K})$ ha

n autovalori distinti in \mathbb{K}

allora \bar{A} è diagonalizzabile su \mathbb{K} .

dim: Se $\text{Sp}(A) = \{\lambda_1 < \dots < \lambda_n\} \subset \mathbb{K}$

allora $m_{A, \mathbb{K}}(\lambda_i) = 1 \quad \forall i=1, \dots, n$

$$\Rightarrow 1 \leq m_{g_A}(\lambda_i) \leq m_{A, \mathbb{K}}(\lambda_i) = 1$$

$$\Rightarrow m_{g_A}(\lambda_i) = m_{A, \mathbb{K}}(\lambda_i) \quad \forall i=1, \dots, n$$

$\Rightarrow A$ è diagonalizzabile su \mathbb{K} .

Teorema

□

Es: Trovare $a, b, c \in \mathbb{R}$ t.c.

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$$

sia diagonalizzabile su \mathbb{R} .

Sol.: $P_A(x) = (x-a)(x-c)$.

Se $a \neq c$ A è diag. su \mathbb{R} .

Se $a = c$, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \Rightarrow m_{A, \mathbb{R}}(a) = 2$

$$m_{g_A}(a) = \dim \text{Ker} \begin{pmatrix} 0 & -b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{cases} 2 & \text{se } b=0 \\ 1 & \text{se } b \neq 0 \end{cases}$$

è diag. $\Leftrightarrow b=0$.

□

Es: Stabilire se

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

è diagonalizzabile su \mathbb{R} e nel caso

lo sia trovare una base di autovettori.

Sol.:

$$P_A(x) = x^2 - 9 = (x+3)(x-3)$$

$$\Rightarrow Sp(A) = \{3, -3\}$$

$\Rightarrow A$ ha due autovalori reali

distinti e quindi è diagonalizzabile

su \mathbb{R} .

$$V_3(A) = \text{Ker}(3\mathbb{1}_2 - A) = \text{Ker} \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$= \text{Ker} \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$V_{-3}(A) = \text{Ker}(-3\mathbb{1}_2 - A) = \text{Ker} \begin{pmatrix} -5 & -5 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \text{Ker} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\mathcal{B} = \left\{ v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ è una}$$

base di autovettori.

Es: Stabilire se la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$$

è diagonalizzabile su \mathbb{R} e nel caso

Trovare $B \in \text{Mat}_{2 \times 2}$ diagonalizzante

Sol.: $P_A(x) = x^2 - 5x + 6$
 $= (x-2)(x-3)$

$\text{Sp}(A) = \{2, 3\}$. Quindi A
ha due autovalori reali distinti
e quindi è diagonalizzabile.

$$\begin{aligned} V_2(A) &= \text{Ker}(2\mathbb{1}_2 - A) = \text{Ker} \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = \\ &= \text{Ker}(1, -3) = \left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_3(A) &= \text{Ker}(3\mathbb{1}_2 - A) = \text{Ker} \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \\ &= \text{Ker}(1, -2) = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \end{aligned}$$

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ è t.c. } B^{-1}AB = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

□

Es: Stabilire se

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

è diagonalizzabile su \mathbb{R} e nel caso
lo sia Trovare una base di autovettori.

Sol.:

$$P_A(x) = x^3 - 6x^2 + \frac{1}{2} [36 - (6 \cdot 3)]x - \det A$$
$$= x^3 - 6x^2 + 9x - \det A$$

$$\det A = \det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} =$$
$$= -(-3-1) = 4$$

$$P_A(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 4$$

Cerchiamo le radici di P_A tra i divisori di 4

$$P_A(1) = 1 - 6 + 9 - 4 = -5 + 5 = 0$$

$\Rightarrow 1$ è una radice

$$\begin{array}{r|l} x^3 - 6x^2 + 9x - 4 & x-1 \\ \hline x^3 - x^2 & x^2 - 5x + 4 \\ \hline -5x^2 + 9x - 4 & \\ -5x^2 + 5x & \\ \hline 4x - 4 & \\ \hline & \end{array}$$

$$P_A(x) = (x-1)(x^2-5x+4)$$

$$= (x-1)(x-1)(x-4) = (x-1)^2(x-4)$$

$$m_A(1) = 2$$

$$m_A(4) = 1 \Rightarrow m_{g_A}(4) = 1$$

$$V_4(A) = \text{Ker}(4\mathbb{1}_3 - A) = \text{Ker} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \text{Ker} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \text{Ker} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

$$= \text{Ker} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \text{Ker} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Verifichiamo:

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \checkmark$$

$$V_1(A) = \text{Ker}(\mathbb{1}_3 - A) = \text{Ker} \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \text{Ker}(1 \ 1 \ 1) = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Una base di autovettori è

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\text{Posto } B = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ si ha } B^{-1}AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

□

Es: $J_n(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \lambda & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{pmatrix} \in \text{Mat}_{n \times n} \quad n \geq 2$
si chiama "blocco di Jordan"
di autovalore λ .

$$\text{Sp}(j_n(\lambda)) = \{\lambda\}$$

$$\text{ma } j_n(\lambda)(\lambda) = n$$

$$\text{mg}_{j_n(\lambda)}(\lambda) = \dim \text{Ker} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & & & & 1 \\ 0 & & & & 0 \end{pmatrix} = 1 < n$$

Quindi $j_n(\lambda)$ non è diagonalizzabile
(né su \mathbb{R} né su \mathbb{C}).