# Equazioni cartesiane e parametriche di sottospazi vettoriali e affini di $\mathbb{K}^m$

Sia $U_0$ un sottospazio vettoriale di $\mathbb{K}^m$.
Con l'algoritmo di generazione di basi possiamo trovare una base

$$\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_k\}$$

di $U_0$. Consideriamo la matrice

$$A = (v_1 | \dots | v_k) \in Mat_{m \times k}(\mathbb{K})$$

Allora

$$U_0 = Col(A) \quad e \quad \dim U_0 = k = rg(A).$$

I vettori di $U$ sono quindi descritti come combinazioni lineari

$$t_1 v_1 + \dots + t_k v_k$$

dei $k$ vettori $v_1, \dots, v_k$ e sono quindi <u>parametrizzati</u> in maniera unica da $k$ numeri $t_1, \dots, t_k$.

La rappresentazione

$$U_0 = Col(A)$$

si chiama una <u>rappresentazione parametrica</u> di $U$ e le equazioni

$$X \in U_0 \iff \exists\, t_1, \dots, t_k : X = t_1 v_1 + \dots + t_k v_k$$

si chiamano le <u>equazioni parametriche</u> di $U_0$.

<u>Es</u>: Trovare le equazioni parametriche di $U_0 = \{ X \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0,\ x_2 + x_3 = 0 \}$

<u>Sol.</u>: Risolviamo il sistema

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ \quad\ \ x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$U_0 = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

ovvero

$$U_0 : \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = -t \\ x_3 = t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Sia $U = X_0 + U_0$ un sottospazio affine di $\mathbb{K}^m$.

Sia $\{v_1, \dots, v_k\}$ una base di $U_0$.

Gli elementi di $U$ sono

$$X = X_0 + t_1 v_1 + \dots + t_k v_k \qquad (t_1, \dots, t_k \in \mathbb{K}) \qquad (*)$$

e quindi sono parametrizzati in maniera unica dai $k$ numeri $t_1, \dots, t_k$. Questa si chiama la rappresentazione parametrica di $U$ e $(*)$ sono le equazioni parametriche di $U$.

Es: Trovare le equazioni parametriche di

$$U = \{X \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 1,\ x_2 + x_3 = 2\}.$$

Sol.:

$$U = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Le soluzioni di un sistema lineare formano un sottospazio affine.
Vediamo adesso che ogni sottospazio affine di $\mathbb{K}^n$ è formato dalle soluzioni di un sistema lineare.
Cominciamo considerando il caso dei sottospazi vettoriali.
Sia $U_0 \subseteq \mathbb{K}^n$ un sottospazio vettoriale di $\mathbb{K}^n$. Sia

$$\mathcal{B}_{U_0} = \{v_1, \dots, v_k\}$$

una base di $U_0$ e sia

$$A = (v_1 | \cdots | v_k) \in Mat_{n \times k}(\mathbb{K})$$

la matrice che ha $\mathcal{B}_{U_0}$ come colonne.
Allora, per definizione,

$$U_0 = Col(A).$$

Osserviamo quindi che dato un vettore $b \in \mathbb{K}^n$:

$$b \in U_0 \iff b \in Col(A) \iff rg(A|b) = rg(A) = K$$

Es: Descrivere tutti i vettori $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ t.c. $b \in \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle$.

Sol.:

$$b \in \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle \iff rg \left( \begin{array}{c|c} 1 & b_1 \\ 2 & b_2 \\ 3 & b_3 \end{array} \right) = rg \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 1$$

Riduciamo $\left( \begin{array}{c|c} 1 & b_1 \\ 2 & b_2 \\ 3 & b_3 \end{array} \right)$ a scala:

$$\left( \begin{array}{c|c} 1 & b_1 \\ 2 & b_2 \\ 3 & b_3 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{c|c} 1 & b_1 \\ 0 & b_2 - 2b_1 \\ 0 & b_3 - 3b_1 \end{array} \right)$$

Quindi

$$b \in \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle \iff rg \left( \begin{array}{c|c} 1 & b_1 \\ 0 & b_2 - 2b_1 \\ 0 & b_3 - 3b_1 \end{array} \right) = 1$$

$$\iff \begin{cases} b_2 - 2b_1 = 0 \\ b_3 - 3b_1 = 0 \end{cases}$$

$$\iff b \in Ker \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Teorema: Sia $U_0 \subseteq \mathbb{K}^n$ un sottospazio vettoriale di dimensione $k$. Allora esiste una matrice $C$ con le seguenti proprietà

1) $C \in Mat_{(n-k)\times n}(\mathbb{K})$

2) $\operatorname{Ker} C = U_0$

Inoltre, $C$ si trova con il seguente algoritmo:

i) sia $A \in Mat_{n\times k}(\mathbb{K})$ t.c. $U_0 = Col(A)$ (ovvero $A$ ha per colonne una base di $U_0$)

ii) $(A \mid \mathbb{1}_n) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{c|c} S' & B \\ \hline 0_{(n-k)\times k} & C \end{array}\right)$

dim: Poiché $\operatorname{rg} A =$ numero di colonne di $A$, $\operatorname{rref}(A) = \left(\begin{array}{c} \mathbb{1}_k \\ \hline 0_{(n-k)\times k} \end{array}\right)$. Inoltre ogni matrice a scala $S \underset{R}{\sim} A$ ha la forma $\left(\begin{array}{c} S' \\ \hline 0_{(n-k)\times k} \end{array}\right)$

Otteniamo

$$(A \mid \mathbb{1}_n) \rightsquigarrow (S \mid T)$$

e per il Teorema sulle matrici elementari (algoritmo di inversione generalizzato) $T$ è invertibile e $TA = S$.

Poiché $S = \left(\frac{S'}{0}\right)$ è a blocchi, possiamo scrivere anche $T = \left(\frac{B}{C}\right)$ a blocchi e

$$\left(\frac{B}{C}\right) A = \left(\frac{S'}{0}\right)$$

ovvero $BA = S'$ e $CA = 0$.

Notiamo che poiché $T$ è invertibile, le sue righe sono linearmente indipendenti. e quindi anche le righe di $C$ lo sono.

Ne segue che $\operatorname{rg} C = n-k$ e quindi $\dim \operatorname{Ker} C = k = \operatorname{rg} A = \dim U_0$.

Da $CA = 0$ otteniamo $U_0 = \operatorname{Col}(A) \subseteq \operatorname{Ker} C$ e quindi $U_0 = \operatorname{Ker} C$. ☒

Def: Sia $U_0$ un sottospazio vettoriale di $\mathbb{K}^n$. Sia $C$ una matrice tale che $U_0 = \operatorname{Ker} C$.

L'uguaglianza

$$U_0 = \operatorname{Ker} C$$

si dice una forma cartesiana di $U_0$ e le equazioni

$$CX = 0$$

si chiamano le equazioni cartesiane di $U_0$.

Es: Trovare le equazioni cartesiane di $U_0 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle$.

Sol.:

$$\left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$U_0 = \operatorname{Ker} C$ dove $C = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Le equazione cartesiane di $U_0$ sono

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 = 0 \\ -3x_1 + x_3 = 0 \end{cases}$$

OSS (Importante):

Per descrivere un sottospazio vettoriale di $\mathbb{K}^n$ di dimensione $k$ servono $n-k$ equazioni.

OSS: Le equazioni cartesiane non sono uniche, però si potrebbe fare una scelta canonica in questo modo:

$$(A \mid \mathbb{1}_n) \rightsquigarrow \mathrm{rref}(A \mid \mathbb{1}_n) = \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{1}_k & B \\ \hline 0 & C \end{array}\right)$$

In tal caso $C$ sarebbe a scala ridotta.

<u>NB</u>: Per trovare la matrice $C$ t.c. $\mathrm{Ker}\, C = \mathrm{Col}\, A$ è più agevole negli esempi fare

$$(A \mid X) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{c|c} S & BX \\ \hline 0 & CX \end{array}\right)$$

<u>Es</u>: Trovare le equazioni cartesiane di $\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle$.

<u>Sol.</u>:

$$\left(\begin{array}{c|c} 1 & x_1 \\ 2 & x_2 \\ 3 & x_3 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{c|c} 1 & x_1 \\ 0 & x_2 - 2x_1 \\ 0 & x_3 - 3x_1 \end{array}\right)$$

Equazioni cartesiane sono

$$\begin{cases} x_2 - 2x_1 = 0 \\ x_3 - 3x_1 = 0 \end{cases}$$

ovvero

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 = 0 \\ -3x_1 + x_3 = 0 \end{cases}$$

__Teorema__:

Sia $U = X_0 + U_0 \subseteq \mathbb{K}^n$ un sottospazio affine con giacitura $U_0$ e passante per il punto $X_0 \in \mathbb{K}^n$.
Sia $U_0 = \operatorname{Ker} C$ una forma cartesiana per $U_0$. Allora

$$U = \{ X \in \mathbb{K}^n \mid CX = CX_0 \}.$$

__dim__:

Sia $u \in U$. Allora esiste $v \in U_0$ t.c. $u = X_0 + v$. Quindi $Cu = CX_0 + Cv = CX_0$.
Viceversa, se $u$ è soluzione del sistema $CX = CX_0$ allora $u = X_0 + v$ dove $v = u - X_0 \in \operatorname{Ker} C$. ∎

**Notazione**: Invece di scrivere

$$U = \{ X \in \mathbb{K}^n \mid CX = CX_0 \}$$

scriviamo più brevemente

$$U : CX = CX_0 .$$

Quindi la notazione

$$U : AX = b$$

vuol dire "$U$ è l'insieme delle soluzioni del sistema $AX = b$".

Es: Trovare equazioni cartesiane di

$$U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle .$$

Sol.:

$$U_0 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle = \ker C \text{, dove } C = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Quindi, posto $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$,

$$U : CX = CX_0 \quad \text{ovvero} \quad U : \begin{cases} -2x_1 + x_2 = -1 \\ -3x_1 + x_3 = -2 \end{cases}$$

Es: Trovare equazioni cartesiane di

$$U = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Sol.:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & x_1 \\ 1 & 1 & x_2 \\ 2 & 2 & x_3 \\ 1 & 3 & x_4 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x_2 \\ 2 & -1 & x_1 \\ 2 & 2 & x_3 \\ 1 & 3 & x_4 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x_2 \\ 0 & -3 & x_1-2x_2 \\ 0 & 0 & x_3-2x_2 \\ 0 & 2 & x_4-x_2 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x_2 \\ 0 & -1 & x_1-3x_2+x_4 \\ 0 & 0 & x_3-2x_2 \\ 0 & 2 & x_4-x_2 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x_2 \\ 0 & -1 & x_1-3x_2+x_4 \\ \hdashline 0 & 0 & x_3-2x_2 \\ 0 & 0 & 2x_1-7x_2+3x_4 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \quad U: \begin{cases} -2x_2+x_3 = -5 \\ 2x_1-7x_2+3x_4 = -9 \end{cases}$$