Geometria affine ed euclidea di $\mathbb{R}^2$

Geometria affine = studio della posizione reciproca di sottospazi affini.

Geometria euclidea = studio delle proprietà metriche (distanza e angoli)

Def: Due sottospazi affini

$$U = X_0 + U_0, \quad W = Y_0 + W_0 \subset V$$

di uno spazio vettoriale V si dicono paralleli se $U_0 \subseteq W_0$ o $W_0 \subseteq U_0$.

($X_0, Y_0 \in V$ e $U_0, W_0 \subset V$ sono sottospazi vettoriali.)

Es: Le rette $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \right\rangle$ e $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix} \right\rangle$ sono parallele.

Es: Il piano $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} \right\rangle$ e la retta $\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix} \right\rangle$ sono parallele.

<u>OSS</u>: Se $v_1, v_2 \in X_0 + U_0$ allora

$$v_1 - v_2 \in U_0.$$

Infatti, $v_1 = X_0 + u_1$, $v_2 = X_0 + u_2$ $\Rightarrow v_1 - v_2 = u_1 - u_2 \in U.$

<u>OSS2</u>: Se $U = X_0 + U_0$ e $W = Y_0 + W_0$ sono paralleli, diciamo $U_0 \subseteq W_0$, allora o $U \cap W = \phi$ oppure $U \subseteq W$.

Infatti, se $U \cap W \neq \phi$ sia $v \in U \cap W$. Allora $\exists\ u \in U_0$ e $w \in W_0$ t.c.

$$v = X_0 + u = Y_0 + w.$$

Allora, $X_0 = Y_0 + w - u$. Poiché $U_0 \subseteq W_0$, ne segue che $w - u \in W_0$ e quindi $X_0 \in Y_0 + W_0 = W$. Quindi

$$U = X_0 + U_0 \subseteq Y_0 + W_0 + U_0 = Y_0 + W_0 = W.$$

$\blacksquare$

<u>OSS3</u>: Se $U: AX = b \subset \mathbb{K}^m$ allora $U_0 = \operatorname{Ker} A.$

<u>OSS 4</u>: Siano $U = X_0 + U_0$ e $W = Y_0 + W_0$ due sottospazi affini di $\mathbb{K}^m$ con sottospazi di giacitura U_0 e W_0, rispettivamente. Allora

1) $U \cap W \neq \emptyset \iff X_0 - Y_0 \in U_0 + W_0$

Infatti, se $v \in U \cap W$ allora $v = X_0 + u = Y_0 + w$ per qualche $u \in U_0$ e $w \in W_0$. Allora $X_0 - Y_0 = w - u \in U_0 + W_0$

Viceversa, se $X_0 - Y_0 = u + w \in U_0 + W_0$ allora

$$X_0 - u = Y_0 + w \in U \cap W \neq \emptyset . \quad \square$$

2) Due possibilità per $U \cap W$: o è vuoto oppure è un sottospazio affine con giacitura $U_0 \cap W_0$.

Infatti, consideriamo le eq. cartesiane $U: AX = b$ e $W: CX = d$. (Quindi

Allora $U \cap W : \begin{cases} AX = b \\ CX = d \end{cases}$ e quindi

o è vuoto o è un sottospazio affine.

Le soluzioni del sistema omogeneo $\begin{cases} AX = 0 \\ CX = 0 \end{cases}$ sono $\operatorname{Ker} A \cap \operatorname{Ker} C$.

Sottospazi affini di $\mathbb{R}^2$.

I sottospazi affini di $\mathbb{R}^2$ sono i punti $\{X_0\}$ e le rette.

Data una retta (in forma parametrica)

$$r = X_0 + \langle v \rangle \quad \text{con} \quad v = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

la sua forma cartesiana è

$$r: \ -bx + ay = c \quad \text{dove} \quad c = (-b, a) X_0.$$

Es: L'equazione cartesiana di

$$r = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle \quad \text{è} \quad -3x + 2y = 1$$

Una retta r di $\mathbb{R}^2$ è quindi data dalle soluzioni di un'equazione della forma

$$r: \ ax + by = c \quad (*) \quad \text{con} \quad (a,b) \neq (0,0).$$

Un suo vettore direttore è $\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ e le equazioni parametriche sono

$$r = X_0 + \left\langle \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix} \right\rangle$$

dove X_0 è una soluzione di $(*)$.

Es: $r: \ 2x + 3y = 1 \Rightarrow r = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$

Condizioni di parallelismo

•) Due rette in forma parametrica

$$r = X_0 + \langle v \rangle, \quad s = Y_0 + \langle w \rangle$$

sono parallele se e solo se $rg(v|w) = 1$.

•) Due rette

$$r: ax+by=c, \quad s = Y_0 + \langle w \rangle$$

sono parallele $\Leftrightarrow$ w è soluzione di $ax+by=0$.

•) Due rette

$$r: ax+by=c, \quad s: a'x+b'y=c'$$

sono parallele se e solo se i sistemi

$$ax+by=0 \quad e \quad a'x+b'y=0$$

sono equivalenti $\Leftrightarrow$ $(a,b) \underset{R}{\sim} (a',b')$

$\Leftrightarrow$ $\exists\ T=(t)$ invertibile t.c. $(a',b') = T(a,b) = (ta, tb)$

$\Leftrightarrow$ $Rrg\begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix} = 1$

$\Leftrightarrow$ $\det\begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix} = 0$

$rg(a\ b) = 1 = rg(a',b')$

Condizioni di incidenza di due rette di $\mathbb{R}^2$

·) Due rette in forma parametrica

$$r = X_0 + \langle v \rangle, \quad s = Y_0 + \langle w \rangle$$

si intersecano se e solo se $X_0 - Y_0 \in \langle v, w \rangle$

se e solo se il sistema con matrice completa

$$(v \; w \mid X_0 - Y_0) \text{ è risolubile}$$

se e solo se $\quad rg(v|w) = rg(v|w|X_0-Y_0)$.

In questo caso, ci sono due possibilità

a) $rg(v|w) = rg(v|w|X_0-Y_0) = 1 \Rightarrow r \equiv s$

b) $rg(v|w) = rg(v|w|X_0-Y_0) = 2 \Rightarrow r \cap s = \{P_0\}$

Nel caso b), P_0 si trova così:

Sia $\begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix}$ l'unica soluzione di $(v|w)X = X_0 - Y_0$

ovvero $\quad \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix} = (v|w)^{-1}(X_0 - Y_0)$

allora

$$t_1 v + t_2 w = X_0 - Y_0 \Rightarrow X_0 - t_1 v = Y_0 + t_2 w = P_0.$$

Es: Trovare la posizione reciproca di

$$r = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} \right\rangle , \quad s = \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} \right\rangle$$

Sol.:

$-3x+2y=1$

$\det\begin{pmatrix}2 & 1\\3 & 2\end{pmatrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow$ r ed s non sono parallele

e quindi si intersecano in un'unico punto P_0.

Cerchiamo P_0:

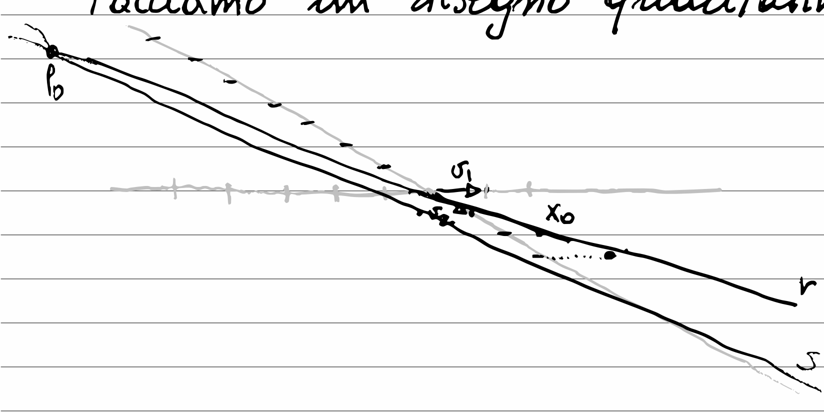
$$\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} \qquad (= X_0 - Y_0)$$

$$\begin{pmatrix}t_1\\t_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & 1\\3 & 2\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & -1\\-3 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\-4\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow P_0 = X_0 - t_1 v = Y_0 + t_2 w =$$

$$= \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-5\\-7\end{pmatrix}$$

Facciamo un disegno qualitativo:



$$V_0^2$$
$$\cup$$
$$\mathcal{B} = \{v_1, v_2\}$$
$$F_{\mathcal{B}} : V_0^2 \simeq \mathbb{R}^2$$

·) Due rette

$r: ax+by=c \quad , \quad s = X_0 + \langle v \rangle$

si intersecano se e solo se $\exists\, t \in \mathbb{R}$ tale che

$X_0 + tv$ è soluzione di $ax+by=c$

Posto $X_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ e $v = \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}$:

$r \cap s \neq \emptyset \iff \exists\, t \in \mathbb{R}$ t.c. $a(x_0 + th) + b(y_0 + tk) = c$

$\iff \exists\, t \in \mathbb{R}$ t.c. $t(ah+bk) = c - ax_0 - by_0$

Ci sono quindi tre possibilità:

a) $ah+bk = 0 = c - ax_0 - by_0 \Rightarrow r \equiv s$

b) $ah+bk \neq 0 \Rightarrow r \cap s = \{P_0\}$. In questo caso

$$P_0 = X_0 + \frac{c - ax_0 - by_0}{ah+bk}\, v$$

c) $ah+bk = 0$ e $c - ax_0 - by_0 \neq 0 \Rightarrow r \cap s = \emptyset$.

Es: Trovare la posizione reciproca di

$r: 2x+3y=-1 \quad , \quad s = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$

Sol.:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2t \\ 1+t \end{pmatrix}$$

Sostituiamo:

$$2(1+2t)+3(1+t)=-1 \iff 7t=-6$$

$$\iff t = -6/7$$

Quindi $r \cap s = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{6}{7} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5/7 \\ 1/7 \end{pmatrix} \right\}$

Es: Trovare la posizione reciproca di

$r: 2x+3y=-1 \quad , \quad s = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 1 \\ -2/3 \end{pmatrix} \rangle$

Sol.:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -2/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+t \\ 1-\frac{2}{3}t \end{pmatrix}$$

Sostituiamo:

$$2(1+t)+3\left(1-\frac{2}{3}t\right) = -1 \iff 0t=-6 \quad \text{impossibile}$$

$\Rightarrow r \cap s = \emptyset$.

·) Due rette in forma cartesiana

$r: ax+by=c$, $s: a'x+b'y=c'$

si intersecano se e solo se il sistema

$$\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$$

è risolubile se e solo se $rg\begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix} = rg\left(\begin{array}{cc|c} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{array}\right)$.

Ci sono 3 possibilità:

a) $rg\begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix} = rg\left(\begin{array}{cc|c} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{array}\right) = 1 \Rightarrow r \equiv s$

b) $rg\begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix} = 2 \Rightarrow r \cap s = \{P_0\}$ e

$$P_0 = \begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} c \\ c' \end{pmatrix}$$

c) $rg\begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix} = 1$ e $rg\left(\begin{array}{cc|c} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{array}\right) = 2 \Rightarrow r \cap s = \emptyset$.

Es: Trovare la posizione reciproca di

$r: \ 2x+3y=-1 \quad , \quad s: \ x+\frac{3}{2}y=-\frac{1}{2}$

Sol.:

$$\mathrm{rg}\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 3/2 & -1/2 \end{array}\right) = 1 \Rightarrow r \equiv s.$$

Es: Trovare la posizione reciproca di

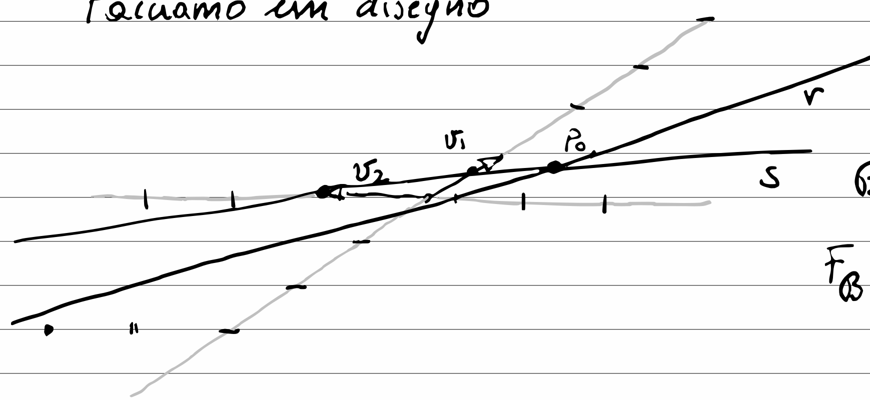
$r: \ 2x+3y=-1 \, , \quad s: \ 3x+2y=2$

Sol.:

$$\det\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = -5 \neq 0 \Rightarrow r \cap s = \{P_0\} \text{ e}$$

$$P_0 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{-5}\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -8 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8/5 \\ -7/5 \end{pmatrix}$$

Facciamo un disegno



$\mathcal{V}_0^2$

$\cup$

$\mathcal{B} = \{v_1, v_2\}$

$F_{\mathcal{B}}: \mathcal{V}_0^2 \simeq \mathbb{R}^2$

Fascio di rette per un punto

Sia $P_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$.

Una retta $r: ax+by=c$ contiene P_0 se e solo se $ax_0+by_0=c$.

Il fascio di rette per P_0 è l'insieme di tutte le rette che contengono P_0:

$$\mathcal{F}_{P_0} = \{ a(x-x_0)+b(y-y_0)=0 \mid (a,b) \neq (0,0) \}$$

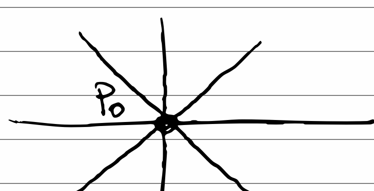
Es: Scrivere le equazioni cartesiane del fascio di rette per $P_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$:

Sol: $a(x-1)+b(y-1)=0$ ovvero

$ax+by=a+b$

Le equazioni parametriche delle rette che contengono P_0 sono, ovviamente

$$P_0 + \langle P \rangle \quad (P \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}).$$



Retta per due punti

Siano $P_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ e $P_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ due punti distinti di $\mathbb{R}^2$.

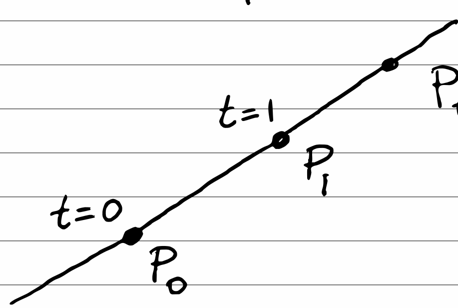
Cerchiamo le equazioni parametriche e cartesiane della retta passante per P_0 e per P_1:

Le equazioni parametriche sono

$$P_0 + \langle P_1 - P_0 \rangle$$

(Infatti, $P_1 - P_0$ appartiene alla giacitura ed è non-nullo).

Si noti la parametrizzazione:



$$P_t = P_0 + t(P_1 - P_0)$$
$$(t \in \mathbb{R})$$

Per le equazioni cartesiane, consideriamo il fascio di rette per P_0

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)=0 \qquad (*)$$

Imponiamo il passaggio per P_1:

$$a(x_1-x_0)+b(y_1-y_0)=0 \qquad (**)$$

Quindi la retta per P_0 e P_1

$$r:\ ax+by=c$$

ha coefficienti (a,b) che sono soluzione di $(**)$. Possiamo scegliere

$$(a,b)=\big((y_1-y_0),-(x_1-x_0)\big).$$

Sostituendo in $(*)$ otteniamo

$$\boxed{(y_1-y_0)(x-x_0)=(x_1-x_0)(y-y_0)}$$

Se $y_1\neq y_0$ e $x_1\neq x_0$, possiamo riscriverla in forma più simmetrica

$$\boxed{\frac{x-x_0}{x_1-x_0}=\frac{y-y_0}{y_1-y_0}}$$

Es: Calcolare equazioni cartesiane e parametrica della retta passante per $P_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ e $P_1 = \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Sol.: Osserviamo che $P_0 \neq P_1$ e che i punti hanno coordinate distinte: per cui l'equazione cartesiana è

$$\frac{x-2}{-4-2} = \frac{y-3}{5-3}$$

ovvero $$-\frac{1}{6}x + \frac{1}{3} = \frac{1}{2}y - \frac{3}{2}$$

ovvero $$\frac{1}{6}x + \frac{1}{2}y = \frac{3}{2} + \frac{1}{3} = \frac{11}{6}$$

ovvero $$x + 3y = 11.$$

Le equazioni parametriche sono

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

ovvero

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

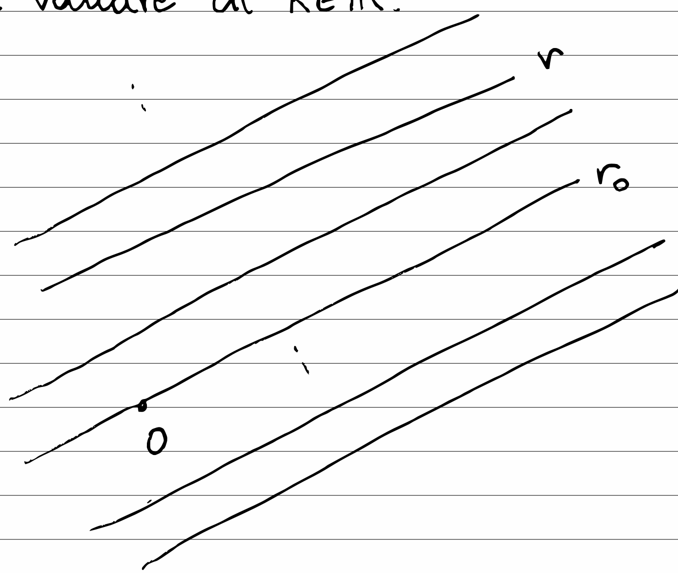
Fascio improprio di rette

Sia $r: a_0 x + b_0 y = c_0$. Come sono fatte le rette parallele a r?

Sono tutte le rette di equazione

$r_K: \quad a_0 x + b_0 y = K$

al variare di $K \in \mathbb{R}$.



Fascio improprio di rette.

Le equazioni parametriche di r_K sono

$$r_K = X_K + \left\langle \begin{pmatrix} -b_0 \\ a_0 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

dove X_K è soluzione di $a_0 x + b_0 y = K$.

Es: Trovare equazioni parametriche e cartesiane della retta passante per $P_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e parallela alla retta $r: 2x+3y=-2$

Sol.:

Consideriamo il fascio improprio di rette parallele a r: $r_K: 2x+3y=K$.

Imponiamo il passaggio per P_0:

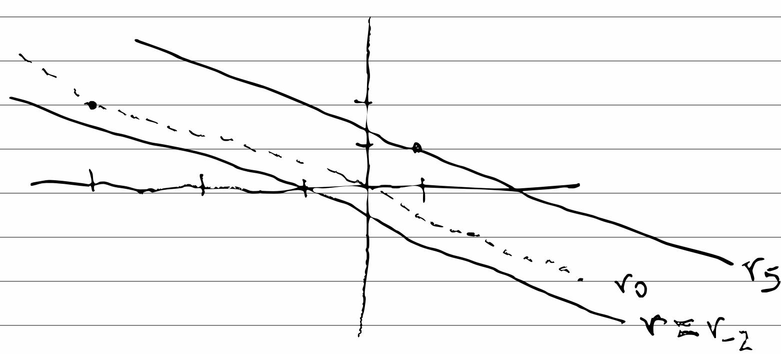
$$2+3=K \Rightarrow K=5.$$

La retta cercata è $r_5: 2x+3y=5$.

Essa ha equazioni parametriche

$$r_5 = P_0 + \left\langle \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Facciamo un disegno:



Struttura metrica standard di $\mathbb{R}^2$

<u>Def</u>: Il <u>prodotto scalare standard</u> di $\mathbb{R}^2$ (o prodotto puntino) è la funzione

$$\cdot : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(X, Y) \longmapsto X \cdot Y := X^t Y$$

In coordinate, se $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ e $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ allora

$$X \cdot Y = (x_1, x_2)\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = x_1 y_1 + x_2 y_2 .$$

<u>Es</u>: $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 3$; $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = -1$; $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2$

<u>Proprietà</u>: 1) $\cdot$ è <u>bilineare</u>, ovvero

$$(\alpha X_1 + \beta X_2) \cdot Y = \alpha X_1 \cdot Y + \beta X_2 \cdot Y \qquad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R},\ \forall X_1, X_2, Y \in \mathbb{R}^2$$
$$X \cdot (\alpha Y_1 + \beta Y_2) = \alpha X \cdot Y_1 + \beta X \cdot Y_2 \qquad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R},\ \forall X, Y_1, Y_2 \in \mathbb{R}^2$$

2) $\cdot$ è <u>simmetrico</u>, ovvero

$$X \cdot Y = Y \cdot X \quad , \ \forall X, Y \in \mathbb{R}^2$$

3) $\cdot$ è <u>definito positivo</u>, ovvero

$X \cdot X \geq 0 \quad \forall X \in \mathbb{R}^2$. Inoltre

$$X \cdot X = 0 \iff X = 0_{\mathbb{R}^2} .$$

Il prodotto scalare standard permette di dare ad $\mathbb{R}^2$ una "struttura metrica" ovvero di definire cos'è una lunghezza e la misura di un angolo.

Def: La norma (o lunghezza) di un vettore $X \in \mathbb{R}^2$ (rispetto al prodotto scalare standard) è il numero

$$\|X\| := \sqrt{X \cdot X}.$$

Proprietà della norma: Dato $X \in \mathbb{R}^2$ si ha

1) $\|X\| \geq 0$ e $\|X\| = 0 \iff X = 0$.

2) $\|\lambda X\| = \sqrt{(\lambda X)\cdot(\lambda X)} = \sqrt{\lambda^2 (X \cdot X)} = |\lambda| \, \|X\|, \ \forall \lambda \in \mathbb{R}$

Es: $\left\|\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right\| = 1$; $\left\|\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\| = 1$; $\left\|\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\| = \sqrt{2}$.

$$\left\|\begin{pmatrix}-3\\6\end{pmatrix}\right\| = \left\|(-3)\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}\right\| = 3 \left\|\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}\right\| = 3\sqrt{5}.$$

$$\left\|\begin{pmatrix}-1\\-2\end{pmatrix}\right\| = \left\|-\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right\| = 1 \cdot \left\|\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right\| = \sqrt{5}.$$

Def: Un **versore** di $(\mathbb{R}^2, \cdot)$ è un vettore di norma 1, ovvero è un vettore $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ tale che $\|X\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} = 1$.

OSS: $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ è un versore $\Leftrightarrow$ $x_1^2 + x_2^2 = 1$

Prop.: $X \in \mathbb{R}^2$ è un versore se e solo se $\exists\, \theta \in [0, 2\pi)$ t.c. $X = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$.

dim:

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ è un versore se e solo se $x_1^2 + x_2^2 = 1$.

Allora $x_1 \in [-1, 1] = \mathrm{Im}(\cos)$. Quindi $\exists\, \theta \in [0, 2\pi)$ tale che $x_1 = \cos\theta$. Allora

$$x_2^2 = 1 - x_1^2 = 1 - \cos^2\theta = \sin^2\theta$$

$\Rightarrow$ $x_2 = \sin\theta$ oppure $x_2 = -\sin\theta = \sin(2\pi - \theta)$

Dato che $\cos(2\pi - \theta) = \cos(\theta)$ otteniamo

$$X = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} \quad \text{o} \quad X = \begin{pmatrix} \cos(2\pi - \theta) \\ \sin(2\pi - \theta) \end{pmatrix}.$$

$\blacksquare$

Notazione: Dato $\theta \in \mathbb{R}$ denotiamo con

$$P_\theta := \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}.$$

I versori di $(\mathbb{R}^2, \cdot)$ sono tutti e soli i vettori P_θ. Osserviamo che:

.) $P_{\theta+2k\pi} = P_\theta \quad \forall k \in \mathbb{Z}$

.) $-P_\theta = P_{\theta+\pi}$

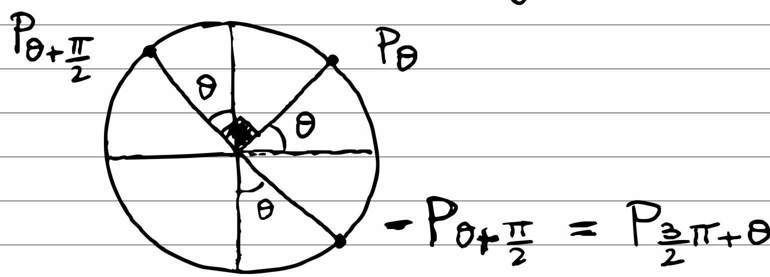
.) $P_\theta \cdot P_\mu = 0 \iff \cos\theta\cos\mu + \sin\theta\sin\mu = 0$

$\iff \cos\theta\cos(-\mu) - \sin\theta(\sin(-\mu)) = 0$

$\iff \cos(\theta - \mu) = 0$

$\iff \theta - \mu \in k\frac{\pi}{2}$, per qualche $k \in \mathbb{Z}$.

Quindi i vettori $\pm P_{\theta+\frac{\pi}{2}}$ sono ortogonali a P_θ come è evidente dalla geometria



<u>Oss</u>: Se identifichiamo $\mathbb{C}$ con $\mathbb{R}^2$

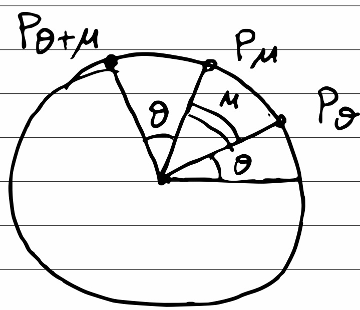
$$z = a + ib \longmapsto \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

allora P_θ è l'immagine di

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i \sin\theta.$$

In $\mathbb{C}$ possiamo moltiplicare e otteniamo

$$e^{i\theta} e^{i\mu} = \cos(\theta+\mu) + i \sin(\theta+\mu) = e^{i(\theta+\mu)}$$



In $\mathbb{R}^2$ non possiamo moltiplicare ma comunque vale la formula:

$$P_{\theta+\mu} = \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\mu - \sin\theta\sin\mu \\ \sin\theta\cos\mu + \cos\theta\sin\mu \end{pmatrix}$$

che lega $P_{\theta+\mu}$ con P_θ e P_μ.

Def: Un versore direttore di una retta è un suo vettore direttore di norma 1.

Oss: Ogni retta ammette esattamente due versori direttori, uno opposto dell'altro.

Oss: Se $X \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0_{\mathbb{R}^2}\}$ allora $\frac{X}{\|X\|}$ è un versore.

Es: $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{X}{\|X\|} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} \end{pmatrix}$

Prop: I versori direttori di una retta $r: ax + by = c$ sono

$$\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} \begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix}$$

Es: •) I versori direttori di $r: 2x + 3y = 1$ sono $\pm \frac{1}{\sqrt{13}} \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

•) I versori direttori di $r = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$ sono $\pm \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Distanza:

Def: La distanza tra $X, Y \in \mathbb{R}^2$ (rispetto alla struttura metrica standard) è

$$\text{dist}(X,Y) = \|X-Y\| = \sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}$$

Es: La distanza tra $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $Y = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ è

$$\text{dist}(X,Y) = \|X-Y\| = \left\| \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{5}.$$

Proprietà:

1) $\text{dist}(X,Y) \geq 0 \quad \forall X, Y.$
2) $\text{dist}(X,Y) = 0 \iff X = Y$
3) $\text{dist}(X+Z, Y+Z) = \text{dist}(X,Y)$ [La distanza è invariante per traslazioni]:

$$\text{dist}(X+Z, Y+Z) = \|(X+Z)-(Y+Z)\| = \|X-Y\|$$
$$= \text{dist}(X,Y).$$

Angoli:

Teorema (Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz)
Dati $X, Y \in \mathbb{R}^2$ si ha

$$-\|X\|\,\|Y\| \leq X \cdot Y \leq \|X\|\,\|Y\|$$

dim: Se $Y = 0_{\mathbb{R}^2}$ il Teorema è banalmente vero.
Assumiamo $Y \neq 0_{\mathbb{R}^2}$. Osserviamo che $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\|\alpha X + \beta Y\|^2 \geq 0 \quad \text{ovvero}$$

$$0 \leq (\alpha X + \beta Y) \cdot (\alpha X + \beta Y) = \alpha^2 X \cdot X + 2\alpha\beta\, X \cdot Y + \beta^2\, Y \cdot Y$$

$$= \alpha^2 \|X\|^2 + 2\alpha\beta\, X \cdot Y + \beta^2 \|Y\|^2$$

Poniamo $\alpha = \|Y\|^2$ e $\beta = -X \cdot Y$ si ha

$$0 \leq \|X\|^2 \|Y\|^4 - 2\|Y\|^2 (X \cdot Y)^2 + (X \cdot Y)^2 \|Y\|^2$$

$$= \|X\|^2 \|Y\|^4 - (X \cdot Y)^2 \|Y\|^2$$

e quindi

$$(X \cdot Y)^2 \|Y\|^2 \leq \|X\|^2 \|Y\|^4.$$

Estraendo la radice quadrata e dividendo per $\|Y\|^2 \neq 0$ otteniamo $|X \cdot Y| \leq \|X\|\,\|Y\|$

$\boxtimes$

COR: Se $X, Y \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0_{\mathbb{R}^2}\}$ allora

$$-1 \le \frac{X \cdot Y}{\|X\| \|Y\|} \le 1$$

Def: L'angolo tra due vettori $X, Y \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0_{\mathbb{R}^2}\}$ è il numero $\theta \in [0, 2\pi)$ t.c.

$$\cos\theta = \frac{X \cdot Y}{\|X\| \|Y\|}.$$

Notazione: $\widehat{XY} = \theta$

Es: Calcolare l'angolo tra $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Sol.:

$$\cos(\widehat{XY}) = \frac{3}{\sqrt{2}\sqrt{5}} = \frac{3}{\sqrt{10}} \Rightarrow \widehat{XY} = \arccos\left(\frac{3}{\sqrt{10}}\right).$$

~~**OSS**: $\forall \alpha \neq 0$ $\widehat{X(\alpha Y)} = \widehat{XY}$. In particolare, l'angolo tra X e Y è uguale all'angolo tra i versori $\frac{X}{\|X\|}$ e $\frac{Y}{\|Y\|}$.~~

ORTOGONALITÀ:

Due vettori non-nulli $X, Y \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ si dicono ortogonali o paralleli se $\cos \widehat{XY} = 0$ ovvero se $X \cdot Y = 0$

NB: Estendiamo la definizione anche al vettore nullo: $X, Y \in \mathbb{R}^2$ sono ortogonali se $X \cdot Y = 0$. Quindi $0_{\mathbb{R}^2}$ è ortogonale a tutti i vettori di $\mathbb{R}^2$.

Notazione: Scriviamo $X \perp Y$ se $X \cdot Y = 0$.

Es: ·) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow e_1 \perp e_2$.

·) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

·) Trovare tutti i vettori ortogonali a $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow a + b = 0$$
$$\Leftrightarrow b = -a$$

I vettori ortogonali a $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ sono $\left\{ \begin{pmatrix} -b \\ b \end{pmatrix} \middle| b \in \mathbb{R} \right\}$.

Sia r_0 una retta per l'origine di equazione cartesiana

$$r_0 : ax+by=0 .$$

Allora possiamo riformulare la sua definizione in termini del concetto di ortogonalità come segue:

$$r_0 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid ax+by=0 \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \right\}$$

$$= \left\{ X \in \mathbb{R}^2 \mid X \perp \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \right\}$$

$$= \left\{ X \in \mathbb{R}^2 \mid X \text{ è ortogonale a } \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \right\}.$$

Insiemi e basi ortogonali

Un insieme

$$\{X_1, \dots, X_K\} \subset \mathbb{R}^2 \setminus \{0_{\mathbb{R}^2}\}$$

di vettori non-nulli si dice <u>ortogonale</u> se i suoi elementi sono ortogonali a due a due ovvero se

$$X_i \cdot X_j = 0 \quad \forall i \neq j.$$

<u>Prop.</u>: Un insieme ortogonale $\{X_1, \dots, X_K\}$ é lin. Ind.

<u>dim</u>:

$$\alpha_1 X_1 + \dots + \alpha_K X_K = 0_{\mathbb{R}^2}$$

$$\Rightarrow \quad X_i \cdot (\alpha_1 X_1 + \dots + \alpha_K X_K) = 0 \quad \forall i = 1, \dots, K$$

$$\Rightarrow \quad \alpha_i \, X_i \cdot X_i = 0 \quad \forall i = 1, \dots, K$$

$$\Rightarrow \quad \alpha_i = 0 \quad \forall i = 1, \dots, K. \quad \square$$

$X_i \neq 0_{\mathbb{R}^2}$

<u>COR</u>: $\{X_1, \dots, X_K\}$ ortogonale $\Rightarrow$ $K = 2$ e $\{X_1, X_2\}$ é una base di $\mathbb{R}^2$.

Def: Una base ortogonale di $(\mathbb{R}^2, \cdot)$ è una base $\mathcal{B} = \{v_1, v_2\}$ di $\mathbb{R}^2$ tale che $v_1 \cdot v_2 = 0$.

Es: ·) $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ è una base ortogonale.

·) $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ è una base ortogonale.

Def: Una base ortonormale di $(\mathbb{R}^2, \cdot)$ è una base ortogonale $\mathcal{E} = \{E_1, E_2\}$ di $(\mathbb{R}^2, \cdot)$ composta di versori, ovvero

1) $E_1 \cdot E_2 = 0$

2) $E_1 \cdot E_1 = 1 = E_2 \cdot E_2$

Es: ·) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ e $\left\{ \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \right\}$ sono basi ortonormali di $(\mathbb{R}^2, \cdot)$.

·) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ e $\left\{ \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \right\}$ non sono basi ortonormali di $(\mathbb{R}^2, \cdot)$.

Coefficienti di Fourier

Sia $\mathcal{B} = \{v_1, v_2\}$ una base ortogonale di $(\mathbb{R}^2, \cdot)$. Dato un vettore $w \in \mathbb{R}^2$ esistono unici $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ tali che

$$w = x_1 v_1 + x_2 v_2 .$$

Come sono fatti x_1 e x_2?

Osserviamo che

$$w \cdot v_1 = (x_1 v_1 + x_2 v_2) \cdot v_1 \overset{v_2 \cdot v_1 = 0}{=} x_1 \, v_1 \cdot v_1$$

$$w \cdot v_2 = (x_1 v_1 + x_2 v_2) \cdot v_2 \underset{v_1 \cdot v_2 = 0}{=} x_2 \, v_2 \cdot v_2$$

Quindi

$$x_1 = \frac{w \cdot v_1}{v_1 \cdot v_1} \quad \text{e} \quad x_2 = \frac{w \cdot v_2}{v_2 \cdot v_2} .$$

I due numeri $\frac{w \cdot v_1}{v_1 \cdot v_1}$ e $\frac{w \cdot v_2}{v_2 \cdot v_2}$ si chiamano i coefficienti di Fourier di w in $\mathcal{B}$.

Si ha

$$\boxed{w = \frac{w \cdot v_1}{v_1 \cdot v_1} v_1 + \frac{w \cdot v_2}{v_2 \cdot v_2} v_2}$$

Quindi è facile calcolare le coordinate di un vettore in una base ortogonale

<u>Es</u>: $\mathcal{B} = \left\{ v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

Cerchiamo le coordinate di

$$w = \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \end{pmatrix}$$

nella base $\mathcal{B}$:

Dato che $\mathcal{B}$ è ortogonale

$$w = \frac{w \cdot v_1}{v_1 \cdot v_1} v_1 + \frac{w \cdot v_2}{v_2 \cdot v_2} v_2$$

$$= \frac{1}{5} v_1 - \frac{17}{5} v_2$$

I coefficienti di Fourier di w in $\mathcal{B}$ sono $\frac{1}{5}$ e $-\frac{17}{5}$.

Sottospazi ortogonali

Sia $U_0 \subseteq \mathbb{R}^2$ un sottospazio vettoriale.

L'insieme

$$U_0^{\perp} = \{X \in \mathbb{R}^2 \mid X \cdot u = 0 \quad \forall u \in U_0\}$$

si chiama l'insieme ortogonale a U_0.

Prop.: $U_0^{\perp}$ è un sottospazio vettoriale.

dim:

$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad \forall X, Y \in U_0^{\perp} \quad \forall u \in U_0$

$$(\alpha X + \beta Y) \cdot u = \alpha\, X \cdot u + \beta\, Y \cdot u = 0$$

$$\Rightarrow \alpha X + \beta Y \in U_0^{\perp} \Rightarrow U_0^{\perp} \text{ è un sp. vettoriale.}$$

$\square$

oss (Importante): Sia $r_0 : ax + by = 0$. Allora

$$r_0^{\perp} = \left\langle \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Def: Un vettore non nullo $n \in \left\langle \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \right\rangle$ si chiama un vettore normale a r_0.

Disuguaglianza Triangolare

Teorema (Disuguaglianza Triangolare):

Dati $X, Y \in \mathbb{R}^2$

$$\|X+Y\| \leq \|X\| + \|Y\|$$

dim:

$$\|X+Y\|^2 = (X+Y)\cdot(X-Y) =$$
$$= \|X\|^2 + 2\,X\cdot Y + \|Y\|^2$$
$$\underset{\text{Cauchy-Schwarz}}{\leq} \|X\|^2 + 2\|X\|\|Y\| + \|Y\|^2 = (\|X\| + \|Y\|)^2$$

$\blacksquare$

COR (Disuguaglianza Triangolare)

$\forall\, X, Y, Z \in \mathbb{R}^2$

$$\text{dist}(X,Y) \leq \text{dist}(X,Z) + \text{dist}(Z,Y)$$

dim:

$$\text{dist}(X,Y) = \|X-Y\| = \|X-Z+Z-Y\| \leq \|X-Z\| + \|Z-Y\|.$$

Teorema di Pitagora

Siano X e Y due vettori ortogonali. Allora

$$\|X+Y\|^2 = \|X\|^2 + \|Y\|^2$$

dim:

$$\|X+Y\|^2 = \|X\|^2 + 2X\cdot Y + \|Y\|^2 = \|X\|^2 + \|Y\|^2.$$

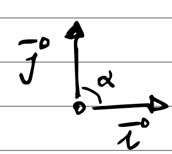
$\blacksquare$

Rappresentazione grafica di $(\mathbb{R}^2, \cdot)$

Nel piano euclideo $\mathcal{E}^2$ fissiamo un'unità di misura per le lunghezze. Allora la misura degli angoli è univocamente determinata (infatti un angolo di 1 radiante è quello che in una circonferenza di raggio 1 sottende un arco lungo 1).

Fissiamo $O \in \mathcal{E}^2$.

Un *riferimento cartesiano* di $\mathcal{V}_O^2$ è una base $\mathcal{B} = \{ \vec{i} = \overrightarrow{OA_1}, j = \overrightarrow{OA_2} \}$ di $\mathcal{V}_O^2$ tale che la lunghezza di i e j è uno e $\vec{i}$ e $\vec{j}$ sono ortogonali



$|\vec{i}| = |\vec{j}| = 1$

$\alpha = \frac{\pi}{2}$

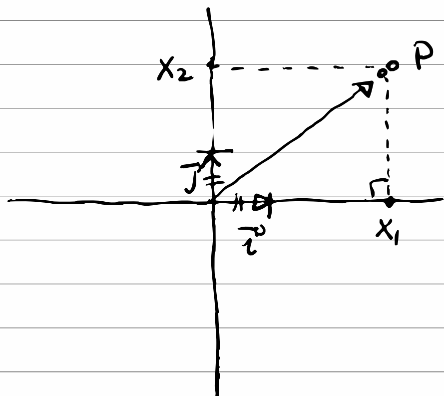
Prop.: Se $\mathcal{B} = \{\vec{i}, \vec{j}\}$ è un riferimento cartesiano di V_0^2, allora

$$F_{\mathcal{B}} : V_0^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

preserva le distanze e gli angoli.

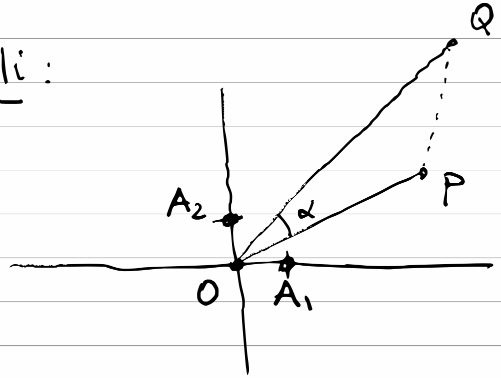
dim:

Sia $\vec{OP} = x_1 \vec{i} + x_2 \vec{j}$.



$$|\vec{OP}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} = \left\| \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right\| = \| F_{\mathcal{B}}(\vec{OP}) \|$$

Angoli:



Per il Teorema del coseno o di Carnot (v. dopo)

$$|\overline{OP}|^2 + |\overline{OQ}|^2 - 2\,|\overline{OP}|\,|\overline{OQ}|\cos\alpha = |\overrightarrow{QP}|^2$$

$$\Rightarrow \quad \cos\alpha = \frac{1}{2\,|\overline{OP}|\,|\overline{OQ}|}\left(|\overline{OP}|^2 + |\overline{OQ}|^2 - |\overline{QP}|^2\right)$$

$$\overrightarrow{OP} = x_1\,\vec{i} + x_2\,\vec{j} \quad \Rightarrow \quad |\overrightarrow{OP}|^2 = x_1^2 + x_2^2$$

$$\overrightarrow{OQ} = y_1\,\vec{i} + y_2\,\vec{j} \quad \Rightarrow \quad |\overline{QQ}|^2 = y_1^2 + y_2^2$$

$$|QP|^2 = |\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OQ}|^2 = (x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2$$

$$\cos\alpha = \frac{x_1^2 + x_2^2 + y_1^2 + y_2^2 - (x_1 - y_1)^2 - (x_2 - y_2)^2}{2\sqrt{x_1^2 + x_2^2}\,\sqrt{y_1^2 + y_2^2}}$$

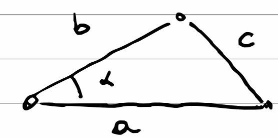
$$= \frac{x_1^2 + x_2^2 + y_1^2 + y_2^2 - (x_1^2 + y_1^2 - 2x_1y_1) - (x_2^2 + y_2^2 - 2x_2y_2)}{2\sqrt{x_1^2 + x_2^2}\,\sqrt{y_1^2 + y_2^2}}$$

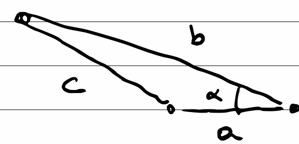
$$= \frac{x_1y_1 + x_2y_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}\,\sqrt{y_1^2 + y_2^2}} = \cos \widehat{F_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{OP})\, F_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{OQ})}$$

$\boxtimes$

Richiami:

Teorema del coseno o di Carnot

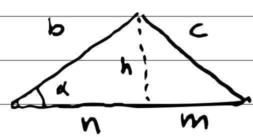




$$a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha = c^2$$

dim:

·)



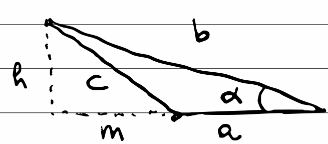
$$n + m = a$$

$$h = b\sin\alpha \,, \quad n = b\cos\alpha \,, \quad m = a - b\cos\alpha$$

$$\Rightarrow c^2 = m^2 + h^2 = (a - b\cos\alpha)^2 + (b\sin\alpha)^2$$

$$= a^2 - 2ab\cos\alpha + b^2\cos^2\alpha + b^2\sin^2\alpha .$$

·)



$$h = b\sin\alpha$$

$$a + m = b\cos\alpha$$

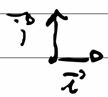
$$c^2 = h^2 + m^2 = b^2\sin^2\alpha + (b\cos\alpha - a)^2 =$$

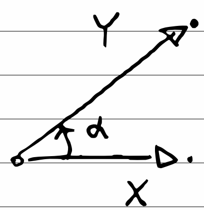
$$= b^2\sin^2\alpha + b^2\cos^2\alpha - 2ab\cos\alpha + a^2$$

$\blacksquare$

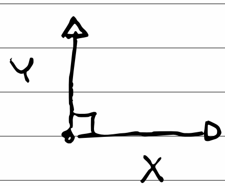
Quindi per misurare angoli e distanze in $\mathcal{E}^2$ (in cui abbiamo scelto una unità di misura) possiamo fare i conti in $(\mathbb{R}^2, \cdot)$.

Interpretazione geometrica degli angoli

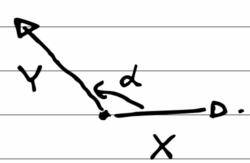




$X \cdot Y > 0$ α è ACUTO



$X \cdot Y = 0$ $\alpha = \frac{\pi}{2}$

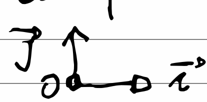


$X \cdot Y < 0$ α OTTUSO

Da ora in poi: Identificheremo

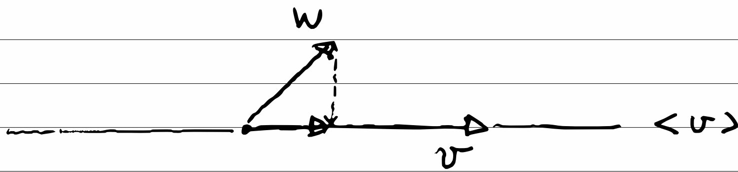
$$(\mathbb{R}^2, \cdot) \equiv (\mathcal{V}_O^2, \frac{1}{H}) \equiv (\mathbb{R}^2, \cdot)$$

mediante la funzione $F_{\mathcal{B}}$ dove $\mathcal{B} = \{\vec{\imath}, \vec{\jmath}\}$

$\mathcal{B} =$ 

Proiezione ortogonale

Sia $v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0_{\mathbb{R}^2}\}$ un vettore non-nullo e sia $w \in \mathbb{R}^2$. Ci chiediamo qual'è il vettore della retta $\langle v \rangle$ più vicino a w?



L'intuizione geometrica ci dice che tale vettore $t_0 v$ deve essere tale che

$w - t_0 v$ è ortogonale a v.

Vediamolo in maniera analitica:

Cerchiamo $t_0 \in \mathbb{R}$ t.c.

$$\text{dist}(w, t_0 v) \le \text{dist}(w, tv) \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

ovvero

$$\|w - t_0 v\| \le \|w - tv\| \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

ovvero

$$\|w - t_0 v\|^2 \leq \|w - tv\|^2 \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

ovvero

$$(w - t_0 v) \cdot (w - t_0 v) \leq (w - tv) \cdot (w - tv) \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

ovvero

$$w \cdot w - 2 t_0 \, v \cdot w + t_0^2 \, v \cdot v \leq w \cdot w - 2t \, v \cdot w + t^2 \, v \cdot v \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

ovvero

$$\|w\|^2 - 2 t_0 \, v \cdot w + t_0^2 \|v\|^2 \leq \|w\|^2 - 2t \, v \cdot w + t^2 \|v\|^2 \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Stiamo quindi cercando il minimo della funzione

$$f(t) = \|w\|^2 - 2t \, v \cdot w + t^2 \|w\|^2$$

Si Tratta di un polinomio di grado due in una variabile.

$$f'(t) = -2 \, v \cdot w + 2t \|v\|^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \qquad t = \frac{v \cdot w}{\|v\|^2}$$

Quindi $\boxed{t_0 = \frac{v \cdot w}{v \cdot v}}$

Def: La proiezione ortogonale di w su v è il vettore

$$pr_v(w) := \frac{v \cdot w}{v \cdot v} v$$

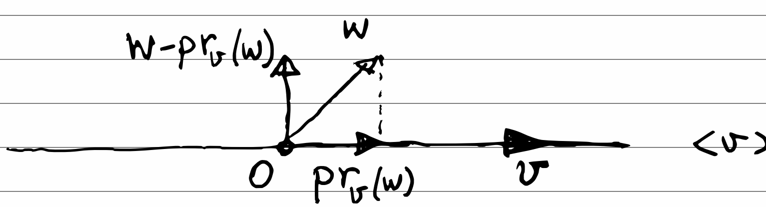
Abbiamo quindi dimostrato che $pr_v(w)$ è il multiplo di v più vicino a w.

Vediamolo algebricamente:

$$\left(w - pr_v(w)\right) \cdot v = \left(w - \frac{v \cdot w}{v \cdot v} v\right) \cdot v$$

$$= w \cdot v - v \cdot w = 0$$

$$\Rightarrow \left(w - pr_v(w)\right) \perp \langle v \rangle$$



Quindi, $\forall t \in \mathbb{R}$

$$\text{dist}(w, tv)^2 = \| w - tv \|^2 =$$

$$= \| w - pr_v(w) + pr_v(w) - tv \|^2 =$$

$$= \| (w - pr_v(w)) + (pr_v(w) - tv) \|^2 =$$

$(w - pr_v(w)) \in \langle v \rangle^\perp$

Teorema di Pitagora

$$= \| w - pr_v(w) \|^2 + \| pr_v(w) - tv \|^2$$

$$\geq \| w - pr_v(w) \|^2 =$$

$$= \text{dist}(w, pr_v(w))$$

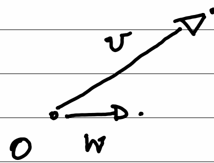
L'uguaglianza è vera se e solo se

$$\| pr_v(w) - tv \| = 0$$

ovvero se e solo se

$$pr_v(w) = tv .$$

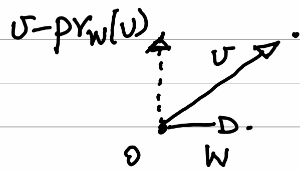
<u>Es</u>: Siano $v, w \in \mathbb{R}^2$ lin. Ind.



Allora $\mathcal{B} = \{w, v\}$ è una base di $\mathbb{R}^2$.

L'insieme $\{w, v - pr_w(v)\}$

è ortogonale



se dividiamo per le norme otteniamo

$$\mathcal{B}_0 = \left\{ E_1 = \frac{w}{\|w\|}, \ E_2 = \frac{v - pr_w(v)}{\|v - pr_w(v)\|} \right\}$$

una base ortonormale

che è il raddrizzamento di $\mathcal{B} = \{w, v\}$.

Si noti che $\mathcal{B}$ è ordinato, nel senso

che se avessimo raddrizzato $\mathcal{B} = \{v, w\}$

avremmo ottenuto $\mathcal{B}_0' = \left\{ \frac{v}{\|v\|}, \frac{w - pr_v(w)}{\|w - pr_v(w)\|} \right\}$

Decomposizione ortogonale

Sia $U_0 \subseteq \mathbb{R}^2$ un sottospazio vettoriale.
Allora

$$U_0 \oplus U_0^{\perp} = \mathbb{R}^2.$$

In particolare, $\dim U_0^{\perp} = 2 - \dim U_0$.

<u>dim</u>: Se $U_0 = \{0_{\mathbb{R}^2}\}$ allora $U_0^{\perp} = \mathbb{R}^2$.
Se $U_0 = \mathbb{R}^2$ allora $U_0^{\perp} = \{0_{\mathbb{R}^2}\}$.
Assumiamo quindi che $U_0 = \langle v \rangle$ sia una retta. Sia $w \in \mathbb{R}^2$. Allora

$$w = \left(w - pr_v(w)\right) + pr_w(v) \in U_0^{\perp} + U_0 .$$

Quindi

$$U_0^{\perp} + U_0 = \mathbb{R}^2$$

Inoltre $U_0 \cap U_0^{\perp} = \{0_{\mathbb{R}^2}\}$, e quindi

$$\mathbb{R}^2 = U_0 \oplus U_0^{\perp}. \quad \blacksquare$$

COR: $\left(U_0^{\perp}\right)^{\perp} = U_0$

dim: Chiaramente, $U_0 \subseteq \left(U_0^{\perp}\right)^{\perp}$.

Inoltre, $\dim \left(U_0^{\perp}\right)^{\perp} = 2 - \dim U_0^{\perp} = \dim U_0$.

COR: Sia $r_0 : ax + by = 0$. Allora

$$r_0^{\perp} = < \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} >.$$

Es: Sia $r_0 : x + 2y = 0$

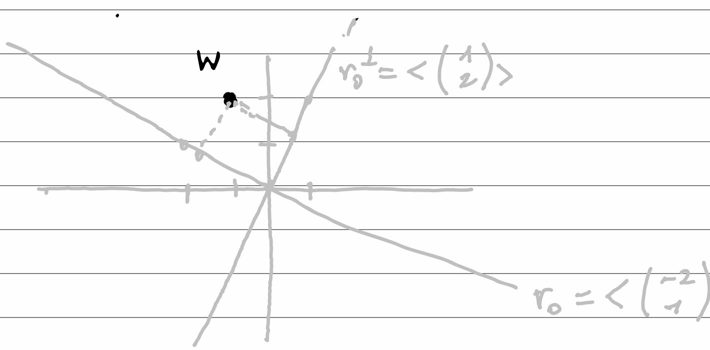
Allora $r_0 = < v = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} >$ e $r_0^{\perp} = < \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} >$.

Scriviamo il vettore $w = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \in r_0 \oplus r_0^{\perp}$:

$$w = \left(w - pr_v(w)\right) + pr_v(w) =$$

$$= w - \frac{w \cdot v}{v \cdot v} v + \frac{w \cdot v}{v \cdot v} v = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{4}{5} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{4}{5} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{3}{5} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{4}{5} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$



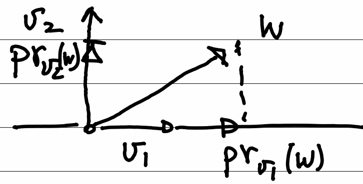
<u>OSS</u> (importante):

Sia $v_1 \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0_{\mathbb{R}^2}\}$ e sia v_2 un generatore di $\langle v_1 \rangle^\perp$. Quindi, ad esempio, se $v_1 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$.

Allora $\mathbb{R}^2 = \langle v_1 \rangle \oplus \langle v_2 \rangle$.

Sia $w \in \mathbb{R}^2$. Allora

$$\boxed{w - pr_{v_1}(w) = pr_{v_2}(w).}$$



<u>dim</u>:

$w - pr_{v_1}(w) \perp v_1 \Rightarrow w - pr_{v_1}(w) = \lambda v_2.$

Dimostriamo che $\lambda = \dfrac{w \cdot v_2}{v_2 \cdot v_2}$.

$$\left(w - pr_{v_1}(w)\right) \cdot v_2 = w \cdot v_2 \Rightarrow (\lambda v_2) \cdot v_2 = w \cdot v_2$$

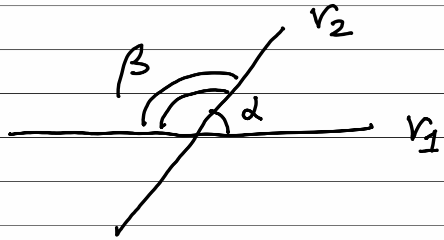
$$\Rightarrow \lambda = \frac{w \cdot v_2}{v_2 \cdot v_2}$$

∎

Angolo tra rette

Siano $r_1 = P_1 + \langle v_1 \rangle$ e $r_2 = P_2 + \langle v_2 \rangle$ due rette di $\mathbb{R}^2$.

Supponiamo che si intersechino



allora formano due angoli supplementari

$\alpha + \beta = \pi$ e quindi $\cos(\beta) = -\cos(\alpha)$.

Si definisce l'angolo tra r_1 ed r_2 come l'angolo acuto tra α e β. Più precisamente:

Def: L'*angolo* tra due rette $r_1 = P_1 + \langle v_1 \rangle$ ed $r_2 = P_2 + \langle v_2 \rangle$ è il numero

$\widehat{r_1 r_2} \in [0, \frac{\pi}{2}]$ tale che

$$\cos \widehat{r_1 r_2} = |\cos \widehat{v_1 v_2}|$$

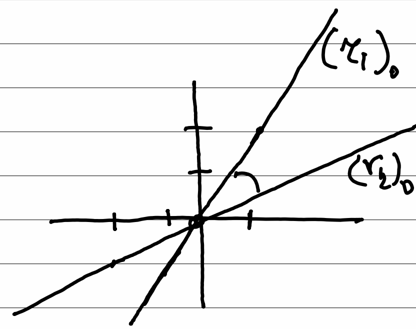
Es: Calcolare l'angolo tra le rette

$r_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$ e $r_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$

Sol.:

$$|\cos \widehat{v_1 v_2}| = \left| \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}}{\sqrt{5}\,\sqrt{5}} \right| = \frac{4}{5}$$

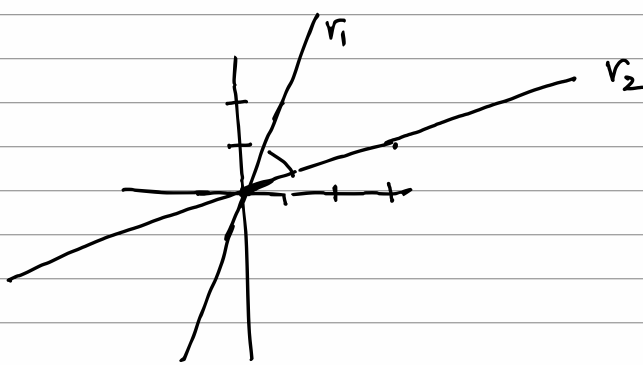
$$\Rightarrow \widehat{r_1 r_2} = \arccos\left(\frac{4}{5}\right)$$



Es: Calcolare l'angolo tra le rette

$r_1 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$ e $r_2 = \left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

Sol.:

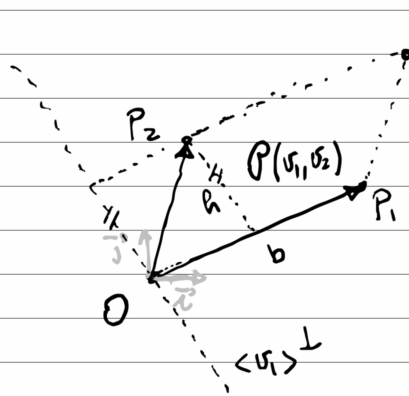


$$\cos \widehat{r_1 r_2} = \left| \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}}{\sqrt{5}\,\sqrt{10}} \right| = \frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{r_1 r_2} = \frac{\pi}{3}.$$

Ricordiamo seni, coseni e Tg di alcuni angoli

	sin	cos	$Tg = \sin/\cos$
0	0	$1 = \sqrt{4}/2$	0
$\pi/6$	$1/2$	$\sqrt{3}/2$	$1/\sqrt{3}$
$\pi/4$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	1
$\pi/3$	$\sqrt{3}/2$	$1/2$	1
$\pi/2$	$\sqrt{4}/2 = 1$	0	1

Determinante 2x2 come area orientata



$v_1 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$

$P(v_1,v_2)$ = Parallelogramma generato da v_1 e v_2 = = parallelogramma con vertici O, P_1, P_2, P_1+P_2

TEOREMA:

$$\text{Area}(P(v_1,v_2)) = |\det(v_1|v_2)| = \left|\det\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\right|$$

dim:

$\text{Area}(P(v_1,v_2))$ = base x altezza

Possiamo prendere come base $\|v_1\| = \sqrt{a^2+b^2}$ e come altezza $\|pr_n\, v_2\|$, dove $\langle n\rangle = \langle v_1\rangle^\perp$.

Scegliamo $n = \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$. Allora

$$pr_n\, v_2 = \frac{v_2 \cdot n}{n \cdot n}\, n \Rightarrow \|pr_n v_2\| = \frac{|v_2 \cdot n|}{\|n\|} = \frac{|ad-bc|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Quindi:

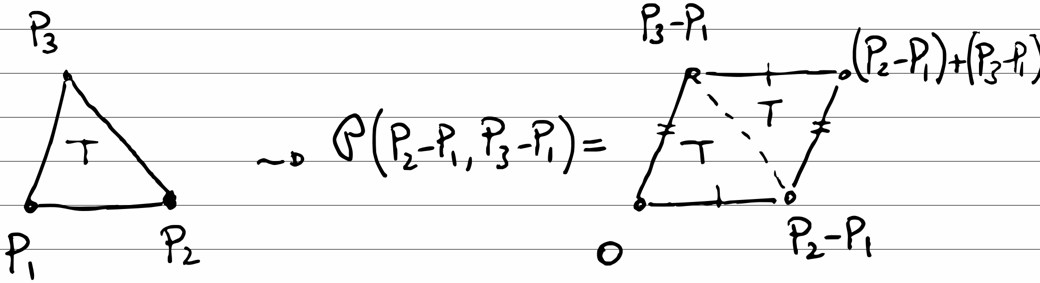
$$\text{Area}(P) = |\det(v_1|v_2)|. \quad \square$$

Cor: Sia T un triangolo di vertici P_1, P_2, P_3. Allora

$$\text{Area}(T) = \frac{1}{2} \left| \det(P_2 - P_1, P_3 - P_1) \right|$$

dim:

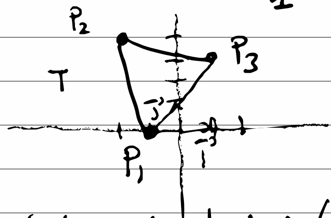
$$\text{Area}\left(\mathcal{P}(P_2 - P_1, P_3 - P_1)\right) = 2\,\text{Area}(T).$$



$\square$

Es: Calcolare l'area del Triangolo di vertici $P_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $P_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$, $P_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

Sol.:



$$\text{Area}(T) = \frac{1}{2} \left| \det(P_2 - P_1, P_3 - P_1) \right| = \frac{1}{2} \left| \det \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \right| = \frac{11}{2}$$

Circonferenze

Una circonferenza di centro $C=\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2$ e raggio $r>0$, é il luogo dei punti che si trovano a distanza r dal punto C: denotiamola con $\mathcal{C}(C,r)$:

$$\mathcal{C}(C,r)=\{X\in\mathbb{R}^2 \mid \operatorname{dist}(X,C)=r\}$$
$$=\{X\in\mathbb{R}^2 \mid \|X-C\|=r\}$$
$$=\{X\in\mathbb{R}^2 \mid \|X-C\|^2=r^2\}$$

Quindi:

$$\mathcal{C}(C,r):\ (x-c_1)^2+(y-c_2)^2=r^2 \qquad (*)$$

ovvero

$$\mathcal{C}(C,r):\ x^2+y^2-2c_1x-2c_2y+(c_1^2+c_2^2-r^2)=0.$$

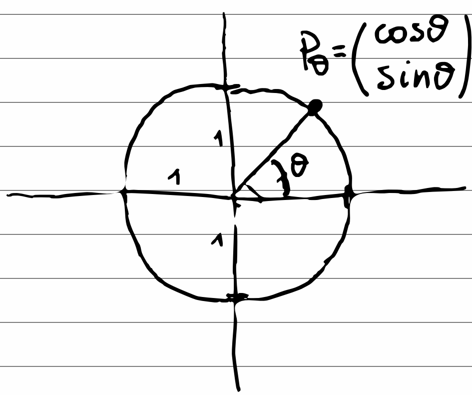
L'equazione $(*)$ o $(**)$ si chiama equazione cartesiana della circonferenza di centro C e raggio r.

Es: L' equazione cartesiane della circonferenza di centro $C = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ e raggio 2 è

$$x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0$$

I punti di una circonferenza sono parametrizzati dal parametro "angolo": ad esempio la circonferenza di centro $O_{\mathbb{R}^2}$ e raggio 1 consiste di tutti i versori di $(\mathbb{R}^2, \cdot)$ e quindi

$$\mathcal{C}(O_{\mathbb{R}^2}, 1) = \left\{ P_\theta := \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} \,\middle|\, \theta \in \mathbb{R} \right\}$$



La circonferenza di centro C e raggio r è quindi descritta come segue

$$\mathcal{C}(C,r) = \{ C + r P_\theta \mid \theta \in \mathbb{R} \}$$

Scriviamo

$$\mathcal{C}(C,r) : C + r \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} \quad (\theta \in \mathbb{R}) \quad (***)$$

e diciamo che (***) è <u>un'equazione parametrica</u> di $\mathcal{C}(C,r)$.

Trovare l'equazione parametrica di una circonferenza vuol dire quindi trovare il suo centro ed il suo raggio.

Es: Trovare un'equazione parametrica della circonferenza di equazione

$$\mathcal{C}: \quad x^2+y^2-3x+4y+4=0$$

Sol.: Completiamo i quadrati:

$$x^2+y^2-3x+4y+4 =$$

$$= \left(x^2-2\cdot\frac{3}{2}x+\frac{9}{4}-\frac{9}{4}\right)+\left(y^2+2\cdot 2y+4-4\right)+4$$

$$= \left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}+\left(y+2\right)^2-4+4$$

$$4x+9=z^2$$

$$x=\frac{z^2}{4}-\frac{9}{4}=\frac{z^2-9}{4}=\frac{(z+3)(z-3)}{4}$$

Quindi

$$\mathcal{C}: \left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\left(y+2\right)^2=\frac{9}{4}$$

Ne segue che $\mathcal{C}$ ha centro $C=\begin{pmatrix}3/2\\-2\end{pmatrix}$

e raggio $r=\sqrt{\frac{9}{4}}=\frac{3}{2}$

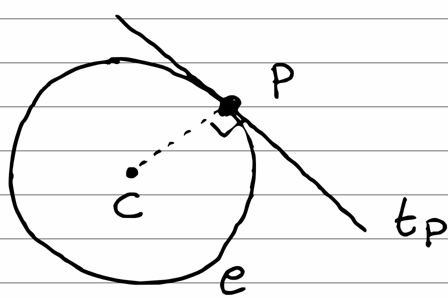
L'equazione parametrica di $\mathcal{C}$ è

$$\mathcal{C}: \quad C+r\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix} \qquad \theta\in[0,2\pi).$$

Retta tangente ad un punto di una circonferenza

Sia $\mathcal{C} = \mathcal{C}(C, r)$ una circonferenza di centro C e raggio r e sia $P \in \mathcal{C}$ un suo punto.

La retta tangente a $\mathcal{C}$ nel punto P è l'unica retta, denotata con t_P, passante per P e che interseca $\mathcal{C}$ unicamente nel punto P.

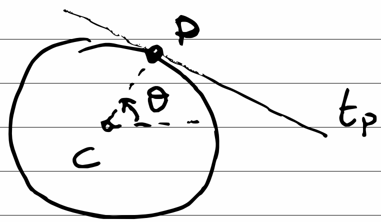


Dalla geometria è evidente che t_P è la retta passante per P e ortogonale al vettore $\overrightarrow{CP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OC}$.

OSS: Dato che $P \in \mathcal{C}$, $\exists\, \theta$ t.c.

$$P = C + r P_\theta$$

Per cui P è messo



Allora $P_\theta = \frac{1}{r}(P - C) = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$.

Il vettore direttore di t_P deve essere ortogonale a $P_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$ ed è ad

esempio

$$v = \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{3}{2}\pi + \theta\right) \\ \sin\left(\frac{3}{2}\pi + \theta\right) \end{pmatrix} = P_{\frac{3}{2}\pi + \theta}$$

oppure

$$v = P_{\theta + \frac{\pi}{2}} = \begin{pmatrix} \cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) \\ \sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) \end{pmatrix} = - P_{\frac{3}{2}\pi + \theta}$$

<u>Es</u>: Trovare la retta tangente alla circonferenza dell'esercizio precedente

$\mathcal{C}: x^2+y^2-3x+4y+4=0$

nel punto $P = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$.

<u>Sol.</u>: Sappiamo dall'esercizio precedente che

$\mathcal{C}: \left(x-\frac{3}{2}\right)^2 + (y+2)^2 = \frac{9}{4}$

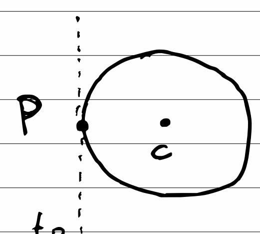
e quindi

$C = \begin{pmatrix} 3/2 \\ -2 \end{pmatrix}$ e $r = 3/2$

In particolare

$$P = \begin{pmatrix} 3/2 \\ -2 \end{pmatrix} + \frac{3}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = C + r\, P_\pi$$

Quindi



ci aspettiamo che t_P sia parallela all'asse y:

$t_P = P + \langle v \rangle$ dove $v \cdot \overrightarrow{CP} = 0$.

$\overrightarrow{CP} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3/2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3/2 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$t_P = P + \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \; : \; x = 0$.

Es: Trovare la retta tangente alla circonferenza dell'esercizio precedente

$$\mathcal{C}: x^2+y^2-3x+4y+4=0$$

nel punto $P = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 9 \\ 3\sqrt{3}-8 \end{pmatrix}$

Sol.: Il centro ed il raggio di $\mathcal{C}$ sono

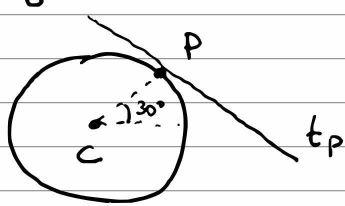
$$C = \begin{pmatrix} 3/2 \\ -2 \end{pmatrix} \quad e \quad r = 3/2$$

Cerchiamo θ t.c. $P = C + r\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$. Si ha

$$\cos\theta = \frac{1}{r}\left(\frac{9}{4}-\frac{3}{2}\right) = \frac{2}{3}\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6} \quad (30°)$$

$$P-C = \begin{pmatrix} \frac{9}{4}-\frac{3}{2} \\ \frac{3}{4}\sqrt{3}-\cancel{2}+\cancel{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/4 \\ \frac{3}{4}\sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$$



Il vettore direttore è $P_{\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}} = P_{\frac{3}{4}\pi} = \begin{pmatrix} -\cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$

$$P_{\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}} = P_{\frac{2}{3}\pi} = \begin{pmatrix} -\sqrt{3}/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

$$t_P = P + \left\langle \begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle : \quad x+\sqrt{3}y = \frac{9}{2}-2\sqrt{3}$$

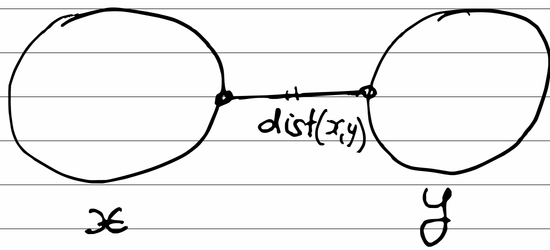
Osserviamo che $P-C = \frac{3}{4}\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$ e quindi t_P è ortogonale a $P-C$ e passa per P.

Distanza punto-retta

Sia $P = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ e $r \subset \mathbb{R}^2$ una retta.

Vogliamo calcolare la distanza tra P ed r.

In generale, se $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ sono due sottoinsiemi di $\mathbb{R}^2$



allora

$$\mathrm{dist}(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) := \min_{x \in \mathcal{X},\, y \in \mathcal{Y}} \mathrm{dist}(x, y)$$

$$= \min_{x \in \mathcal{X},\, y \in \mathcal{Y}} \|x - y\|$$

Nel nostro caso:

$$\mathrm{dist}(P, r) = \min_{Q \in r} \|P - r\|$$

Vediamo come calcolare questo numero:

Abbiamo dimostrato sia analiticamente che algebricamente, che se $r = \langle v \rangle$ è una retta passante per l'origine allora $pr_v(P) = \frac{P \cdot v}{v \cdot v} v \in r$ è il punto di r più vicino a P. Quindi

$$dist(P, \langle v \rangle) = \| P - pr_v(P) \|.$$

Se $r = Q + \langle v \rangle$ allora, usando il fatto che la distanza è invariante per traslazioni, si ha

$$\begin{aligned} dist(P, Q + \langle v \rangle) &= dist(P-Q, \langle v \rangle) \\ &= \| (P-Q) - pr_v(P-Q) \| \\ &= \| P - Q - \frac{(P-Q) \cdot v}{v \cdot v} v \|. \end{aligned}$$

<u>Es</u>: $P = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $r = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \rangle$ allora

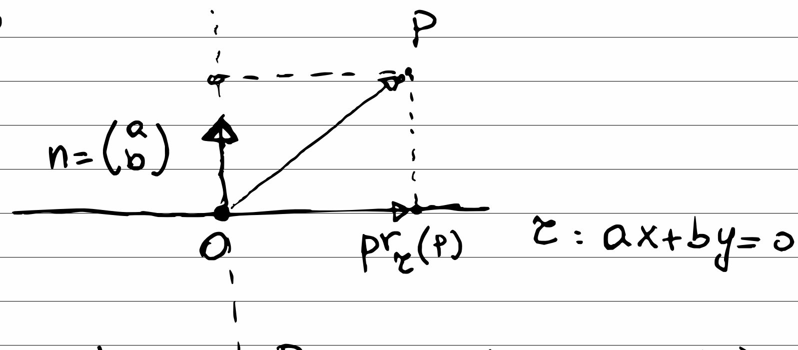
$$dist(P, r) = \| \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - pr_{\binom{1}{2}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \| = \| \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{\binom{2}{1} \cdot \binom{1}{2}}{5} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \|$$

$$= \| \begin{pmatrix} 2 - \frac{4}{5} \\ 1 - \frac{8}{5} \end{pmatrix} \| = \| \begin{pmatrix} \frac{6}{5} \\ -\frac{3}{5} \end{pmatrix} \| = \frac{3}{5} \| \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \| = \frac{3}{\sqrt{5}}$$

Se $r: ax+by=c$ allora $r^\perp = \langle \binom{a}{b} \rangle$.

Il vettore $n = \binom{a}{b}$ si chiama il vettore <u>normale</u> alla retta r.

Se $c=0$



osserviamo che $P - pr_r(P) = pr_n(P)$.

Se $c \neq 0$, sia $Q \in r$ cosicché $Q \cdot n = c$.

$$(P-Q) - pr_{\langle v \rangle}(P-Q) = pr_{\binom{a}{b}}(P-Q)$$

e quindi

$$dist(P,r) = \| pr_n(P-Q) \| = \left\| \frac{(P-Q)\cdot n}{n \cdot n} n \right\|$$

$$= \frac{|(P-Q)\cdot n|}{\|n\|} = \frac{|P\cdot n - Q \cdot n|}{\|n\|}$$

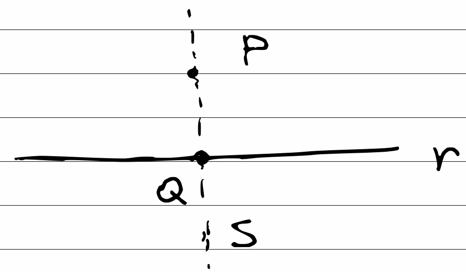
$$= \frac{|ax_0+by_0-c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Es: $P = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $r: 2x - y = 1$.

Allora

$$\text{dist}(P, r) = \frac{|2 \cdot 3 - 2 - 1|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{3}{\sqrt{5}}.$$

OSS:



Sia s la retta ortogonale ad r e passante per P e sia $Q = r \cap s$.

Allora $\text{dist}(P, r) = \|P - Q\|$.

Pendenza e coseni direttori di una retta

Date due rette

$$r_1 = P_1 + \langle v \rangle \qquad r_2 = P_2 + \langle w \rangle$$

si definisce l'angolo tra r_1 e r_2 come il numero $\widehat{r_1 r_2} \in [0, \frac{\pi}{2}]$ t.c

$$\cos \widehat{r_1 r_2} = \left| \cos (\widehat{vw}) \right|$$

Es: Se $r: ax+by=c$ in $\mathbb{R}^2$

e $r_2: y=0$ (asse delle x)

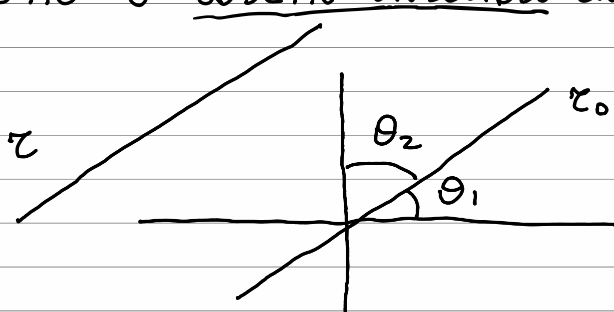
e $r_3: x=0$ (asse delle y)

allora

$$\cos(\widehat{r r_2}) = \cos\left(\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right) = \left| -\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \right|$$

$$\cos(\widehat{r r_3}) = \cos\left(\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right) = \left| \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \right|$$

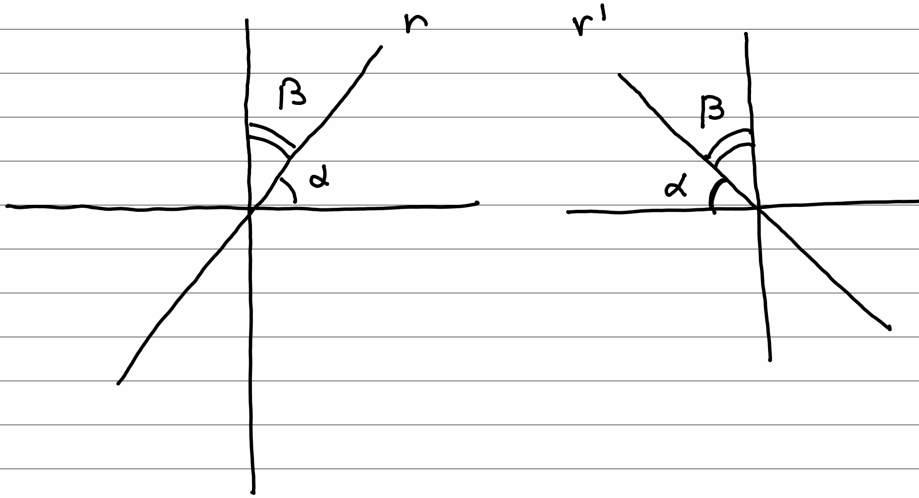
sono i coseni direttori di r



$$\cos\theta_1 = \left| -\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \right|$$

$$\cos\theta_2 = \left| \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \right|$$

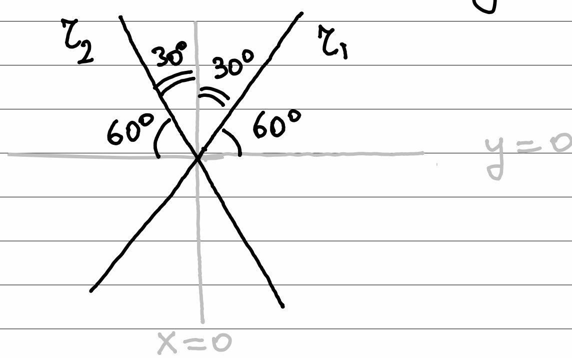
NB: I coseni direttori di una retta passante per l'origine non determinano la retta univocamente:



Per determinare la retta univocamente dobbiamo richiedere il passaggio per un punto oppure la sua pendenza nel senso che adesso andiamo a spiegare.

Es: Determinare equazione cartesiane e parametriche delle rette passanti per O e aventi coseni direttori $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Sol.: Le rette formano un angolo di $\frac{\pi}{3}$ con l'asse delle x e un angolo di $\frac{\pi}{6}$ con l'asse delle y:



Quindi le rette sono

$$\pm \frac{\sqrt{3}}{2} x + \frac{1}{2} y = 0$$

$$r_1 : -\frac{\sqrt{3}}{2} x + \frac{1}{2} y = 0$$

$$r_2 : \frac{\sqrt{3}}{2} x + \frac{1}{2} y = 0$$

Prop. Se $r_1: y = m_1 x + q_1$ $r_2: y = m_2 x + q_2$ allora l'angolo α tra r_1 e r_2 è t.c.

$$tg(\alpha) = \left| \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} \right|$$

Infatti,

$$(\cos\alpha)^2 = \frac{\left(\binom{1}{m_1} \cdot \binom{1}{m_2}\right)^2}{(1+m_1^2)(1+m_2^2)} = \frac{(1+m_1 m_2)^2}{(1+m_1^2)(1+m_2^2)}$$

$$(\sin\alpha)^2 = 1 - \cos^2\alpha = \frac{(1+m_1^2)(1+m_2^2) - (1+m_1 m_2)^2}{(1+m_1^2)(1+m_2^2)}$$

$$= \frac{\cancel{1} + m_2^2 + m_1^2 + \cancel{m_1^2 m_2^2} - \cancel{1} - 2m_1 m_2 - \cancel{m_1^2 m_2^2}}{(1+m_1^2)(1+m_2^2)} = \frac{(m_1 - m_2)^2}{(1+m_1^2)(1+m_2^2)}$$

$$\Rightarrow (Tg\,\alpha)^2 = \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{(m_1 - m_2)^2}{(1+m_1 m_2)^2} \quad \blacksquare$$

Es: Calcolare l'angolo tra

$r_1: 3x + y + 5 = 0$ e $r_2: 2x - y + 1 = 0$

Sol.: Scriviamo r_1 ed r_2 in forma "esplicita":

$r_1: y = -3x - 5$ e $r_2: y = 2x + 1$. Si ha

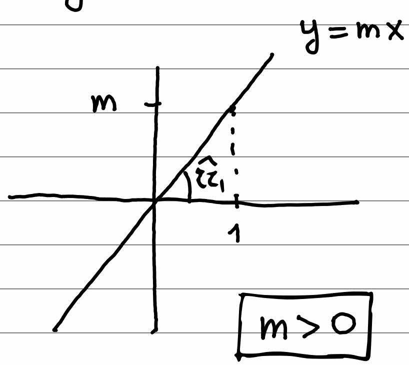
$$Tg(\widehat{r_1 r_2}) = \left| \frac{-3-2}{1+(-3)2} \right| = \left| \frac{-5}{5} \right| = 1 \Rightarrow \widehat{r_1 r_2} = \frac{\pi}{4}$$

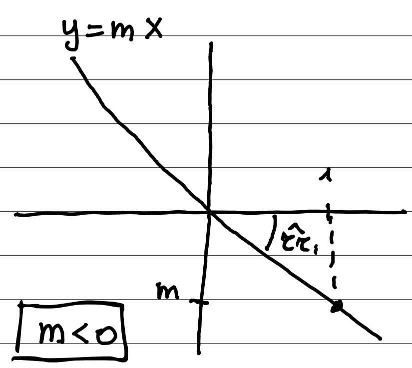
Def: Sia r una retta di $\mathbb{R}^2$ di equazione $r: y = mx + q$.
Il numero m si chiama la pendenza di m.

Il significato geometrico della pendenza è spiegato nel seguente esempio:

Es: $r: y = mx + d$, $r_1: y = 0$ ("asse delle x")

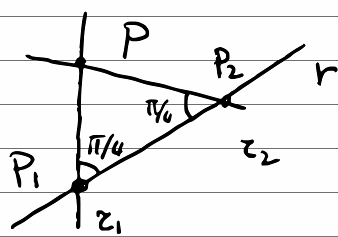
$\operatorname{Tg} \widehat{r r_1} = |m|$





Es: Sia $r: 2x+y=1$ e $P=\binom{2}{2}$.
Trovare eq. par. e cartesiane delle due rette r_1 ed r_2 passanti per P e che formano un angolo di $\pi/4$ con r.
Posto $P_1 = P \cap r_1$ e $P_2 = P \cap r_2$, calcolare l'area ed il perimetro del triangolo di vertici P, P_1 e P_2.

Sol.:



r ha pendenza -2. Sia $r_i: y = mx+q$.
t.c. l'angolo tra r e r_i è $\pi/4$. Allora

$$1 = tg(\widehat{r r_1}) = \left|\frac{-2-m}{1-2m}\right|$$

$\Rightarrow$ $1-2m = -2-m$, oppure, $1-2m = 2+m$

$\Rightarrow$ $m = 3$ oppure $m = -1/3$

$\Rightarrow$ $r_1: y = 3x + q_1$ e $r_2: y = -\frac{1}{3}x + q_2$.

Imponiamo il passaggio per $P = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

$r_1 : \; y = 3x + q_1 \implies q_1 = 2 - 6 = -4$

$\implies r_1 : \; y = 3x - 4$ Eq. cart. di r_1.

$\implies r_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle$ Eq. par. di r_1.

$r_2 : \; y = -\frac{1}{3} x + q_2 \implies q_2 = 2 + \frac{2}{3} = \frac{8}{3}$

$\implies r_2 : \; y = -\frac{1}{3} x + \frac{8}{3}$ Eq. cart. di r_2

$\implies r_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$

Verifichiamo

$$\frac{\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}}{\sqrt{10}\,\sqrt{5}} = \frac{3+2}{\sqrt{10}\sqrt{5}} = \frac{5}{\sqrt{10}\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{10}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos\frac{\pi}{4}$$

$$\frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}}{\sqrt{10}\,\sqrt{5}} = \frac{1-6}{\sqrt{10}\sqrt{5}} = \frac{-5}{\sqrt{10}\sqrt{5}} = -\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{10}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\cos\frac{\pi}{4}$$

Troviamo P_1 e P_2:

$P_2 = r \cap r_2$: $\quad r_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 2+3t \\ 2-t \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}$

$r : \; y = -2x+1$

$$2-t = -2(2+3t)+1$$

$$\Leftrightarrow \; 2-t = -4-6t+1$$

$$\Leftrightarrow \; 5t = -5 \; \Leftrightarrow \; t = -1$$

$$\Rightarrow P_2 = \begin{pmatrix} 2-3 \\ 2+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$P_1 = r \cap r_2$: $\quad r_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 2+t \\ 2+3t \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}$

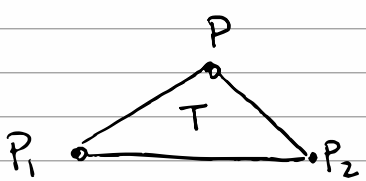
$r : \; y = -2x+1$

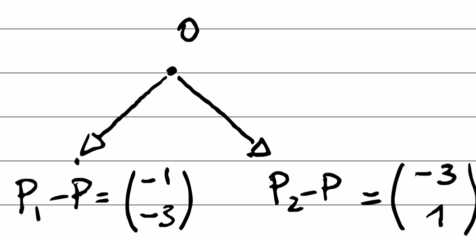
$$2+3t = -2(2+t)+1$$

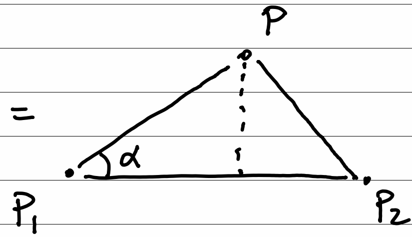
$$\Leftrightarrow \; 2+3t = -4-2t+1$$

$$\Leftrightarrow \; 5t = -5 \; \Leftrightarrow \; t = -1$$

$$\Rightarrow P_1 = \begin{pmatrix} 2-1 \\ 2-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$





$T =$ 

$$\text{Area}(T) = \frac{1}{2} \left| \det (P_1 - P, P_2 - P) \right| =$$

$$= \frac{1}{2} \left| \det \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \right| = 5$$

Potevamo anche osservare che T è

retto in P e quindi

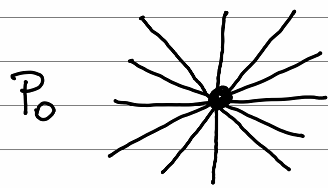
$$\text{Area}(T) = \frac{1}{2} \| P_1 - P \| \, \| P_2 - P \|$$

$$= \frac{1}{2} \left\| \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix} \right\| \left\| \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = \frac{10}{2} = 5 .$$

Fascio di rette (rivisto)

Abbiamo visto che il fascio di rette per un punto $P_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ è

$$\{ a(x-x_0) + b(y-y_0) = 0 \mid (a,b) \neq (0,0) \}$$



Se il punto P_0 è dato come intersezione di due rette r_1 ed r_2 può essere comodo descrivere il fascio di rette come segue:

Siano $r_1 : ax+by=c$ e $r_2 : a'x+b'y=c'$.

Il fascio di rette per r_1 ed r_2 è

$$\{ \alpha(ax+by-c) + \beta(a'x+b'y-c') = 0 \mid (\alpha,\beta) \neq (0,0) \}$$

Se $r_1 \cap r_2 = P_0$ questo è il fascio di rette per P_0 (esercizio!) e $r_1 \parallel r_2$ questo è il fascio improprio di rette.

Es: Siano $r_1: 2x+3y=1$ e $r_2: x+2y=3$.
Sia $P_0 = r_1 \cap r_2$. Trovare la retta r passante per P_0 e di pendenza $\frac{1}{2}$.

Sol.:

$$r: \alpha(2x+3y-1)+\beta(x+2y-3)=0$$

ovvero

$$r: (2\alpha+\beta)x+(3\alpha+2\beta)y = \alpha+3\beta.$$

Imponiamo che la pendenza sia $\frac{1}{2}$:

$$-\left(\frac{2\alpha+\beta}{3\alpha+2\beta}\right) = \frac{1}{2}$$

$\iff \quad -4\alpha-2\beta = 3\alpha+2\beta$

$\iff \quad 7\alpha+4\beta=0$

$\Rightarrow (\alpha,\beta)=(-4,7)$. La retta cercata è

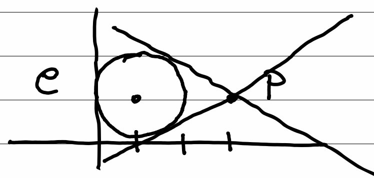
$$-4(2x+3y-1)+7(x+2y-3)=0$$

ovvero

$$r: -x+2y=17.$$

Es: Sia $P = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $\mathcal{C}: (x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$.
Trovare equazioni parametriche e cartesiane delle rette passanti per P e tangenti alla circonferenza $\mathcal{C}$.

Sol.:



Sia $r: a(x-3) + b(y-1) = 0$ una retta per P.
r è tangente alla circonferenza $\mathcal{C}$, di centro $C = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e raggio 1, se e solo se

$$\mathrm{dist}(C, r) = 1. \iff \frac{|a(1-3) + b(1-1)|}{\sqrt{a^2+b^2}} = 1$$

$$\iff |2a| = \sqrt{a^2+b^2} \iff 4a^2 = a^2 + b^2 \iff b = \pm\sqrt{3}\,a$$

le rette cercate r_1 ed r_2 sono

$r_1: (x-3) + \sqrt{3}(y-1) = 0$ e $r_2: (x-3) - \sqrt{3}(y-1) = 0$

ovvero $r_1: x + \sqrt{3}y = 3 + \sqrt{3}$ e $r_2: x - \sqrt{3}y = 3 - \sqrt{3}$.

Le loro eq. parametriche sono

$$r_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle \quad \text{e} \quad r_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$