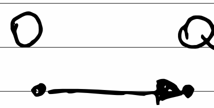
Insiemi convessi.

Sia $V = \mathbb{R}^2$, anche se quanto segue vale in qualunque spazio vettoriale.

Il segemento.

Siano $P, Q \in V$. Vogliamo descrivere come sono fatti i punti del segmento $\overline{PQ}$:

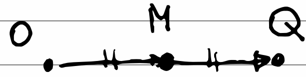
Supponiamo che $P = O$. Allora



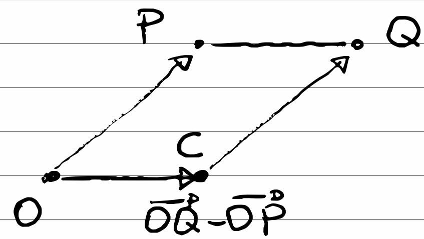
I punti di $\overline{OQ}$ sono i vettori

$$\{ t\,\overrightarrow{OQ} \mid 0 \leq t \leq 1 \}.$$

Ad esempio il punto medio è $\frac{1}{2}\overrightarrow{OQ}$



Consideriamo adesso un segmento $\overline{PQ}$.
Osserviamo che esso è il traslato tramite $\overrightarrow{OP}$ del segmento $\overline{OC}$ dove C è il punto t.c. $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP}$



Otteniamo

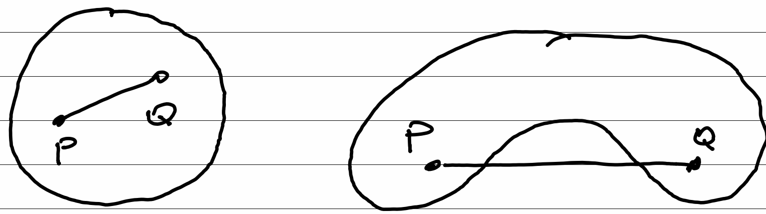
$$\overline{PQ} = \overrightarrow{OP} + \overline{OC} =$$

$$= \left\{ \overrightarrow{OP} + t\left(\overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP}\right) \mid 0 \leq t \leq 1 \right\}$$

$$= \left\{ (1-t)\,\overrightarrow{OP} + t\,\overrightarrow{OQ} \mid 0 \leq t \leq 1 \right\}$$

$$= \left\{ t_1\,\overrightarrow{OP} + t_2\,\overrightarrow{OQ} \mid t_1 + t_2 = 1,\ t_1, t_2 \geq 0 \right\}$$

Un sottoinsieme $C \subset V$ si dice
<u>convesso</u> se
$\forall P, Q \in C \ , \ \overline{PQ} \subset C$



<u>Def</u>: Siano $P_1, \dots, P_n \in V$. Una <u>combinazione convessa</u> di $P_0, \dots, P_n$ è una loro combinazione lineare della forma

$$t_1 P_1 + \dots + t_n P_n \quad \text{con} \quad t_1 + t_2 + \dots + t_n = 1 \ \text{e} \quad t_1, t_2, \dots, t_n \geq 0$$

Denotiamo

$$\mathrm{Conv}(P_1, \dots, P_n) = \{ t_1 P_1 + \dots + t_n P_n \mid t_1 + \dots + t_n = 1, \ t_1, \dots, t_n \geq 0 \}$$

l'insieme delle loro combinazioni convesse.

Prop 1 : $\mathrm{Conv}(P_1,\dots,P_n)$ è convesso.

dim: Siano $P, Q \in \mathrm{Conv}(P_1,\dots,P_n)$.
Dimostriamo che il segmento
$\overline{PQ} = \{(1-t)P + tQ \mid 0 \le t \le 1\} \subseteq \mathrm{Conv}(P_1,\dots,P_n)$
Poiché $P, Q \in \mathrm{Conv}(P_1,\dots,P_n)$ essi sono della forma $P = t_1P_1 + \dots + t_nP_n$ e $Q = s_1P_1 + \dots + s_nP_n$ dove $t_1,\dots,t_n, s_1,\dots,s_n$ sono numeri reali t.c.
$t_1 + \dots + t_n = 1$, $t_1, t_2, \dots, t_n \geq 0$
$s_1 + \dots + s_n = 1$, $s_1, s_2, \dots, s_n \geq 0$.
Allora, per ogni $0 \le t \le 1$, si ha

$$(1-t)P + tQ = (1-t)[t_1P_1 + \dots + t_nP_n] + t[s_1P_1 + \dots + s_nP_n]$$
$$= \sum_{i=1}^{n} [(1-t)t_i + ts_i] P_i.$$

Esso è combinazione convessa di $P_1,\dots,P_n$:

1) $\sum (1-t)t_i + ts_i = (1-t)\sum t_i + t\sum s_i = 1-t+t = 1$

2) $0 \le (1-t)t_i + ts_i \le 1-t+t = 1$.

$\blacksquare$

Prop. 2: $\mathrm{Conv}(P_1, \dots, P_n)$ è il più piccolo insieme convesso che contiene $P_1, \dots, P_n$.

dim: Sia C un insieme convesso che contiene $P_1, \dots, P_n$.

Dimostriamo, per induzione su n che $C \supseteq \mathrm{Conv}(P_1, \dots, P_n)$.

Se $n = 1$ è ovvio.

Se $n \geq 2$ Per ipotesi induttiva,

$$C \supseteq \mathrm{Conv}(P_1, \dots, P_{n-1})$$

Sia $P \in \mathrm{Conv}(P_1, \dots, P_{n-1})$. Poiché C è convesso, C contiene il segmento $\overline{PP_n}$:

$$C \supset \{(1-t_n)P + t_n P_n \mid 0 \leq t_n \leq 1\}$$

Questo vale per ogni $P \in \mathrm{Conv}(P_1, \dots, P_{n-1})$:

$$(1-t_n)(s_1 P_1 + \dots + s_{n-1} P_{n-1}) + t_n P_n \in C$$

$\forall\, s_1, \dots, s_{n-1} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ t.c. $s_1 + \dots + s_{n-1} = 1$.

Osserviamo che il vettore

$$(1-t_n)(s_1 P_1 + \dots + s_{n-1} P_{n-1}) + t_n P_n$$

è combinazione convessa di $P_1, \dots, P_n$: infatti

esso è $\sum_{i=1}^{n-1} (1-t_n) s_i P_i + t_n P_n$

e

1) $\sum_{i=1}^{n-1} (1-t_n) s_i + t_n = (1-t_n) \sum_{i=1}^{n-1} s_i + t_n = 1 - t_n + t_n = 1$

2) $0 \leq (1-t_n) s_i \leq 1 \quad \forall i = 1, \dots, n-1.$

Inoltre ogni vettore $t_1 P_1 + \dots + t_n P_n \in \mathrm{Conv}(P_1, \dots, P_n)$ può essere scritto in questa forma. Infatti:

$$t_1 + \dots + t_n = 1 \Rightarrow t_1 + \dots + t_{n-1} = 1 - t_n$$

Se $t_n \neq 1$ allora

$$t_i = (1-t_n) s_i \quad \text{dove} \quad s_i := \frac{t_i}{1-t_n}.$$

e allora

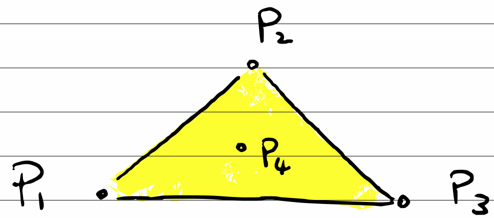
$$t_1 P_1 + \dots + t_n P_n = (1-t_n)[s_1 P_1 + \dots + s_{n-1} P_{n-1}] + t_n P_n.$$

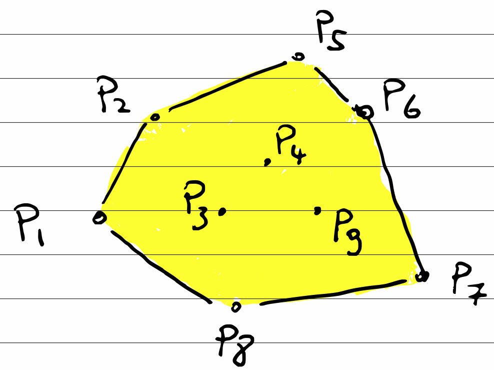
Ne segue che

$$\mathrm{Conv}(P_1, \dots, P_n) \subseteq C. \qquad \boxtimes$$

Def: $\mathrm{Conv}(P_1, \dots, P_n)$ si chiama l' <u>inviluppo convesso</u> di $P_1, \dots, P_n$.

Es:





$\mathrm{Conv}(P_1, \dots, P_n)$ è un poligono avente come vertici un sottoinsieme di $\{P_1, \dots, P_n\}$.

Un insieme $X=\{P_1, \dots, P_n\}$ si dice <u>convessamente dipendente</u> se esiste P_i che è combinazione convessa degli altri.
Ovvero se $\exists P_i$ t.c.

$$Conv(X) = Conv(X \setminus \{P_i\})$$

Altrimenti X si dice convessamente indipendente.

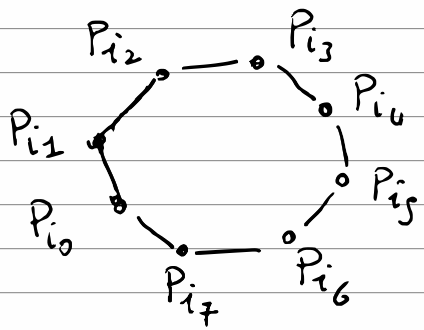
<u>Es</u>: $\{P_1, P_2, \frac{1}{2}P_1 + \frac{1}{2}P_2\}$ è convessamente dipendente.

Sia $X = \{P_1, \dots, P_n\}$ e sia $V \subset X$ un sottoinsieme convessamente indipendente e massimale.
Allora $Conv(X) = Conv(V)$ e V sono i vertici del poligono $Conv(X)$.

Per calcolare l'area di $\mathcal{P} = \mathrm{Conv}(P_1, \dots, P_n)$ possiamo procedere come segue

1) Individuiamo i vertici (distinti) $\{P_{i_0}, P_{i_1}, \dots, P_{i_K}\}$ di $\mathcal{P}$

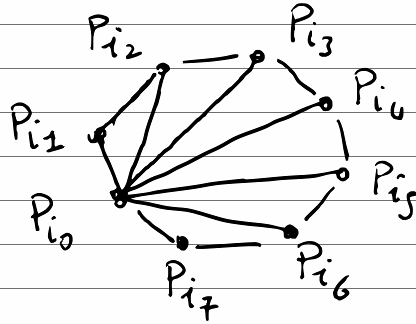
2) ordiniamo i vertici in senso anti-orario



$(K=7)$

3)

$$\text{Area } \mathcal{P} = \sum_{j=1}^{K-1} \text{area triangolo di vertici } \{P_{i_0}, P_{i_j}, P_{i_{j+1}}\}$$



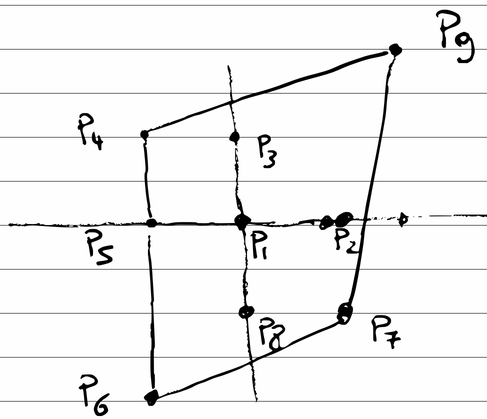
$$= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{K-1} \left| \det\left(P_{i_j} - P_{i_0}, P_{i_{j+1}} - P_{i_0}\right) \right|$$

Es: $P_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $P_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $P_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $P_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$P_5 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $P_6 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $P_7 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $P_8 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $P_9 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

Calcolare l'area di $\mathrm{Conv}(P_1, \dots, P_9)$.

Sol.:



$$\mathrm{Conv}(P_1, \dots, P_9) = \mathrm{Conv}(P_6, P_4, P_9, P_7)$$

Quindi

$$\text{Area Conv}(P_1, \dots, P_9) = \frac{1}{2} \left| \det(P_4 - P_6, P_9 - P_6) \right| +$$

$$+ \frac{1}{2} \left| \det(P_9 - P_6, P_7 - P_6) \right| =$$

$$= \frac{1}{2} \left(\left| \det \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \right| + \left| \det \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \right| \right) = \frac{1}{2}(9 + 7) = 8$$

Sia $\mathcal{L}: V \to V$ lineare.

·) Se $C \subset V$ è convesso allora anche $\mathcal{L}(C)$ è convesso.

dim: $\forall P, Q \in \mathcal{L}(C)$ $\exists P', Q' \in C$ t.c. $P = \mathcal{L}(P')$ e $Q = \mathcal{L}(Q')$.

Mostriamo che $\overline{PQ} \subset \mathcal{L}(C)$:

sia $R \in \overline{PQ}$. Allora $\exists\, 0 \leq t \leq 1$ t.c.

$$R = (1-t)P + tQ = (1-t)\mathcal{L}(P') + t\mathcal{L}(Q')$$
$$= \mathcal{L}\big((1-t)P' + tQ'\big)$$

Poiché C è convesso, $(1-t)P' + tQ' \in C$ e quindi $R \in \mathcal{L}(C)$. ☑

·) $\mathcal{L}\big(\mathrm{Conv}(P_1, \dots, P_n)\big) = \mathrm{Conv}\big(\mathcal{L}(P_1), \dots, \mathcal{L}(P_n)\big)$

dim: $\mathcal{L}(\mathrm{Conv}(P_1, \dots, P_n))$ è convesso e contiene $\mathcal{L}(P_1), \dots, \mathcal{L}(P_n)$. Quindi,

$$\mathcal{L}(\mathrm{Conv}(P_1, \dots, P_n)) \supseteq \mathrm{Conv}(\mathcal{L}(P_1), \dots, \mathcal{L}(P_n)).$$

Viceversa, $\forall R = t_1\mathcal{L}(P_1) + \dots + t_n\mathcal{L}(P_n) = \mathcal{L}(t_1P_1 + \dots + t_nP_n)$

$\in \mathcal{L}(\mathrm{Conv}(P_1, \dots, P_n))$. ☑

•) Siano $P_0, P_1, \dots, P_k$ i vertici di $C = \mathrm{Conv}(P_0, \dots, P_n)$. Sia $\mathcal{L}: V \to V$ un'applicazione lineare <u>invertibile</u>. Allora i vertici di $\mathcal{L}(C)$ sono $\mathcal{L}(P_0), \dots, \mathcal{L}(P_n)$.

<u>dim</u>: $\mathcal{L}(C) = \mathcal{L}(\mathrm{conv}(P_0, \dots, P_k))$
$= \mathrm{Conv}(\mathcal{L}(P_0), \dots, \mathcal{L}(P_k))$

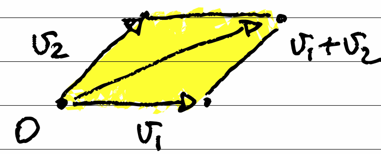
Dobbiamo dimostrare che $\mathcal{L}(P_0), \dots, \mathcal{L}(P_k)$ sono convessamente indipendenti: supponiamo che $\exists\, i$ t.c. $\mathcal{L}(P_i)$ è combinazione convessa degli altri:

$$\mathcal{L}(P_i) = \sum_{j \neq i} t_j \mathcal{L}(P_j)$$

con $\sum t_j = 1$ e $t_j \geq 0 \ \forall j$.

Allora $\mathcal{L}(P_i) = \mathcal{L}\left(\sum_{j \neq i} t_j P_j\right)$, quindi $P_i - \sum t_j P_j \in \mathrm{Ker}\, \mathcal{L} = \{0\}$. $\Rightarrow P_i$ è combinazione convessa degli altri. Assurdo. ∎

Dati $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^2$ abbiamo definito $P(v_1, v_2)$ come il parallelogramma di vertici $0, v_1, v_2, v_1+v_2$:

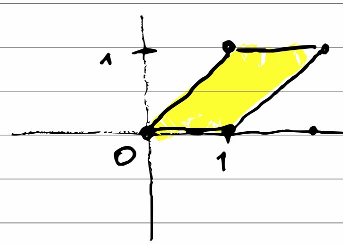
$P(v_1, v_2) =$ 

Quindi :

$$P(v_1, v_2) = \mathrm{Conv}\,(0, v_1, v_2, v_1+v_2).$$

<u>Es</u>: $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Allora

$$P(v_1, v_2) = \mathrm{Conv}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

$=$ 

Prop:

Sia $A \in Mat_{2\times 2}(\mathbb{R})$. Siano $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^2$. Allora

1) $P(Av_1, Av_2) = S_A(P(v_1,v_2))$

2) $\text{Area}\, P(Av_1, Av_2) = |\det(A)|\, \text{Area}(P(v_1,v_2))$

$$= |\det(A)|\, |\det(v_1|v_2)|$$

dim:

$P(Av_1, Av_2) =$ parallelogramma di vertici

$$0,\ Av_1,\ Av_2,\ Av_1 + Av_2 = A(v_1+v_2)$$

$$= \text{Conv}(0, Av_1, Av_2, A(v_1+v_2))$$

$$= S_A(\text{Conv}(0, v_1, v_2, v_1+v_2))$$

Quindi:

$$\text{Area}(P(Av_1, Av_2)) = |\det(Av_1, Av_2)|$$

$$= |\det(A(v_1|v_2))|$$

$$= |\det A|\, |\det(v_1, v_2)|.$$

$\blacksquare$

Es: Calcolare l'area del quadrilatero Q di vertici

$$P_1 = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}, \ P_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \ P_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \ P_4 = \begin{pmatrix} 11 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Sol.: osserviamo che

$$P_1 - P_2 + P_3 = P_4$$

Quindi:

$$(P_1 - P_2) + (P_3 - P_2) = (P_4 - P_2)$$

Ne segue che l'area

$$\begin{aligned} \text{Area}(Q) &= \text{Area } \mathcal{P}(P_1 - P_2, P_3 - P_2) \\ &= \text{Area } \mathcal{P}\left(\begin{pmatrix} 9 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}\right) \\ &= \left| \det \begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \right| = 10 . \end{aligned}$$

Prop.:

Sia $\mathcal{L} = S_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ un'applicazione lineare. Sia $C = \mathrm{Conv}(P_1, \dots, P_n) \subset \mathbb{R}^2$. Allora

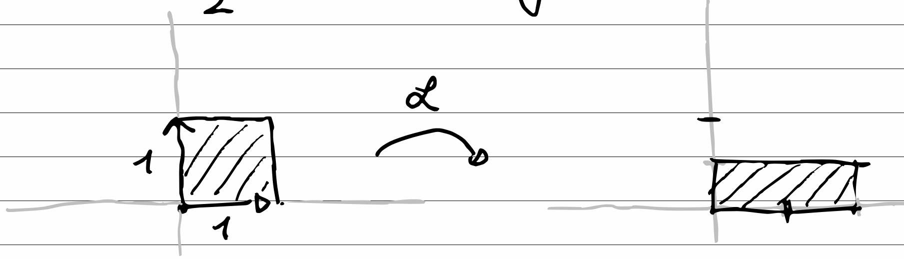
$$\mathrm{Area}(\mathcal{L}(C)) = |\det A| \, \mathrm{Area}(C).$$

dim: Se $\mathcal{L}$ non è invertibile allora $\mathcal{L}(C)$ è contenuto in una retta e quindi ha area $0 = \det A$, e la formula vale.

Supponiamo che $\mathcal{L}$ sia invertibile. Siano $P_{i_0}, \dots, P_{i_k}$ i vertici di C. Allora $\mathcal{L}(P_{i_0}), \dots, \mathcal{L}(P_{i_k})$ sono ~~i~~ vertici di $\mathcal{L}(C)$. Otteniamo

$$\begin{aligned}
\mathrm{Area}\,\mathcal{L}(C) &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{k-1} \left| \det \left(AP_{i_j} - AP_{i_0}, AP_{i_{j+1}} - AP_{i_0} \right) \right| \\
&= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{k-1} \left| \det \left(A \left(P_{i_j} - P_{i_0}, P_{i_{j+1}} - P_{i_0} \right) \right) \right| \\
&= \frac{1}{2} |\det(A)| \sum_{j=1}^{k-1} \left| \det \left(P_{i_j} - P_{i_0}, P_{i_{j+1}} - P_{i_0} \right) \right| \\
&= |\det(A)| \, \mathrm{Area}(C). \qquad \square
\end{aligned}$$

Sia $\mathcal{L}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'applicazione lineare che dilata di 2 l'asse x e di $\frac{1}{2}$ l'asse y:



ovvero $\mathcal{L}(e_1) = 2e_1$ e $\mathcal{L}(e_2) = \frac{1}{2} e_2$.

Sia Q il quadrilatero di vertici

$$P_1 = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\ P_2 = \begin{pmatrix}3\\7\end{pmatrix},\ P_3 = \begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix},\ P_4 = \begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}.$$

Calcolare l'area di $\mathcal{L}(Q)$.

Sol.: $\mathcal{L} = S_A$ dove $A = \begin{pmatrix}2 & 0\\0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$.

$$\text{Area } Q = \frac{1}{2}\left|\det(P_2-P_1, P_3-P_1)\right| + \frac{1}{2}\left|\det(P_3-P_1, P_4-P_1)\right|$$

$$= \frac{1}{2}\left|\det\begin{pmatrix}2 & 1\\6 & -2\end{pmatrix}\right| + \frac{1}{2}\left|\det\begin{pmatrix}1 & -2\\-2 & 1\end{pmatrix}\right| = \frac{15}{2}$$

$$\text{Area } \mathcal{L}(Q) = |\det A| \text{ Area}(Q) = \frac{15}{4}.$$

∎

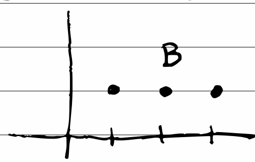
Baricentro:

Dati $P_1, \dots, P_n \in V$ si definisce il loro **baricentro** come

$$B = \frac{1}{n} P_1 + \frac{1}{n} P_2 + \dots + \frac{1}{n} P_n$$

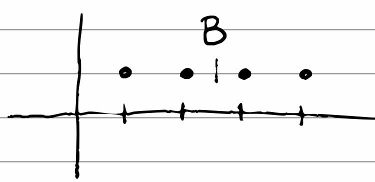
Es: .) Il baricentro di $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$B = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$



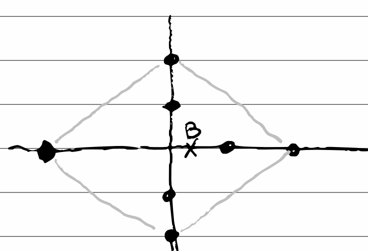
.) Il baricentro di $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ è

$$\frac{1}{4}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 10 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/2 \\ 1 \end{pmatrix}$$



.) Il baricentro di $\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$

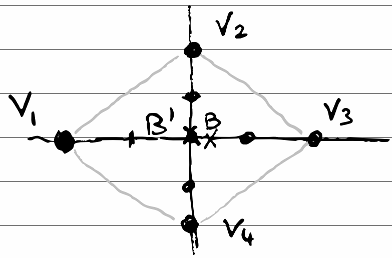
è $B = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$



Def: Il baricentro dell'inviluppo convesso di $P_1, \dots, P_n$ è il baricentro dei suoi vertici.

Es:

Il baricentro di $\mathrm{Conv}\left(\overset{V_1}{\overset{\shortparallel}{\begin{pmatrix}-2\\0\end{pmatrix}}}, \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \overset{V_3}{\overset{\shortparallel}{\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}}}, \overset{V_2}{\overset{\shortparallel}{\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}}}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}, \overset{V_4}{\overset{\shortparallel}{\begin{pmatrix}0\\-2\end{pmatrix}}}\right)$



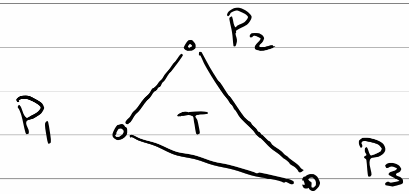
è $B' = \frac{1}{4}(V_1 + V_2 + V_3 + V_4) = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

L'ultimo esempio ci mostra come il baricentro si spostato dal baricentro dell'inviluppo convesso verso la zona in cui ci sono più punti.

Il baricentro degli n punti tiene cioè conto della densità dei punti nel loro inviluppo convesso.

Il Triangolo

Sia T un Triangolo di vertici P_1, P_2, P_3.



I punti di T sono combinazioni convesse di P_1, P_2 e P_3:

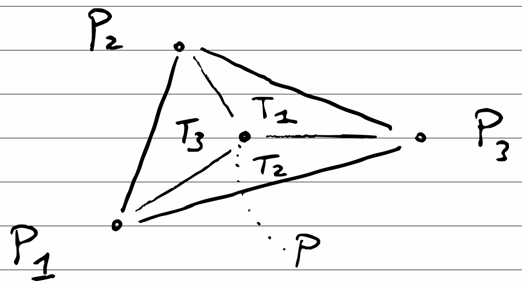
$$T = \{ t_1 P_1 + t_2 P_2 + t_3 P_3 \mid t_1 + t_2 + t_3 = 1 \ , \ t_1, t_2, t_3 \geq 0 \}$$

le coordinate (t_1, t_2, t_3) di un punto di T si chiamano le sue coordinate convesse o baricentriche.

Vediamo una loro interpretazione geometrica:

Teorema: Sia T un triangolo non-degenere ovvero avente area positiva. Siano P_1, P_2 e P_3 i suoi vertici. Sia $P = t_1 P_1 + t_2 P_2 + t_3 P_3$ un suo punto. Esso divide T in 3 triangoli

$$T_1 = \overset{\triangle}{P P_2 P_3}, \quad T_2 = \overset{\triangle}{P P_1 P_3}, \quad T_3 = \overset{\triangle}{P P_1 P_2}$$



Si ha

$$t_1 = \frac{\text{Area}(T_1)}{\text{Area}(T)}, \quad t_2 = \frac{\text{Area}(T_2)}{\text{Area}(T)}, \quad t_3 = \frac{\text{Area}(T_3)}{\text{Area}(T)}$$

dim: $P = t_1 P_1 + t_2 P_2 + t_3 P_3$

$$= t_1 P_1 + t_2 P_2 + (1 - t_2 - t_3) P_3$$

$t_1 + t_2 + t_3 = 1$ $\quad = t_1 (P_1 - P_3) + t_2 (P_2 - P_3) + P_3$

Per cui

$$P - P_3 = t_1 (P_1 - P_3) + t_2 (P_2 - P_3).$$

Poiché Area $(T) > 0$, i due vettori $P_1 - P_3$ e $P_2 - P_3$ sono linearmente indipendenti.

Inoltre Area $(T) = \frac{1}{2} \left| \det (P_1 - P_3 \mid P_2 - P_3) \right|$.

Il vettore $\binom{t_1}{t_2}$ è quindi l'unica soluzione del sistema

$$(P_1 - P_3 \mid P_2 - P_3) \binom{t_1}{t_2} = P - P_3.$$

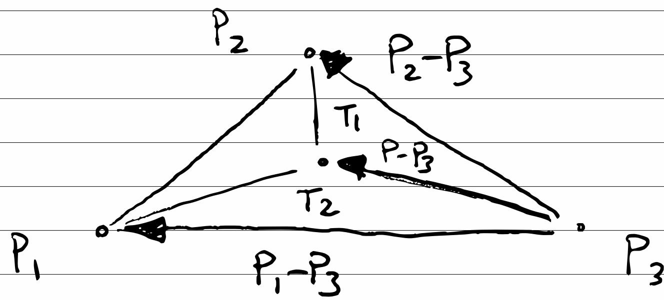
Dalla formula di Cramer otteniamo

$$t_1 = \frac{\det (P - P_3 \mid P_2 - P_3)}{\det (P_1 - P_3 \mid P_2 - P_3)}$$

$$t_2 = \frac{\det (P_1 - P_3 \mid P - P_3)}{\det (P_1 - P_3 \mid P_2 - P_3)}$$

$$t_1 = \frac{\det(P - P_3 \mid P_2 - P_3)}{\det(P_1 - P_3 \mid P_2 - P_3)}$$

$$t_2 = \frac{\det(P_1 - P_3 \mid P - P_3)}{\det(P_1 - P_3 \mid P_2 - P_3)}$$



$$\text{Area}(T_1) = \frac{1}{2} \left| \det(P - P_3 \mid P_2 - P_3) \right|$$

$$\text{Area}(T_2) = \frac{1}{2} \left| \det(P_1 - P_3 \mid P - P_3) \right|$$

$$\text{Area}(T) = \frac{1}{2} \left| \det(P_1 - P_3 \mid P_2 - P_3) \right|$$

Per cui

$$t_1 = |t_1| = \frac{|\det(P - P_3 \mid P_2 - P_3)|}{|\det(P_1 - P_3 \mid P_2 - P_3)|} = \frac{\frac{1}{2}|\det(P - P_3 \mid P_2 - P_3)|}{\frac{1}{2}|\det(P_1 - P_3 \mid P_2 - P_3)|}$$

$t_1 \geq 0$

$$= \frac{\text{Area}(T_1)}{\text{Area}(T)}$$

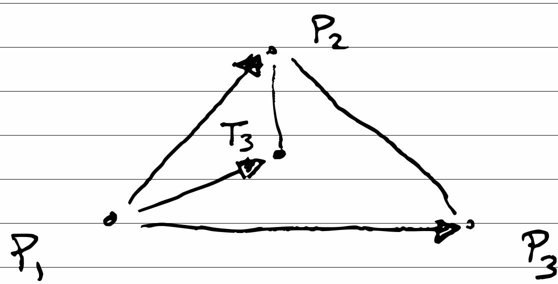
Similmente per T_2.

Per t_3 ragioniamo nello stesso modo:

$$P = t_1 P_1 + t_2 P_2 + t_3 P_3$$
$$= (1 - t_2 - t_3) P_1 + t_2 P_2 + t_3 P_3$$
$$= P_1 + t_2 (P_2 - P_1) + t_3 (P_3 - P_1)$$

$$\Rightarrow \quad P - P_1 = t_2 (P_2 - P_1) + t_3 (P_3 - P_1)$$

$$\Rightarrow \quad t_3 = \frac{|\det (P_2 - P_1 \mid P - P_1)|}{|\det (P_2 - P_1 \mid P_3 - P_1)|}$$

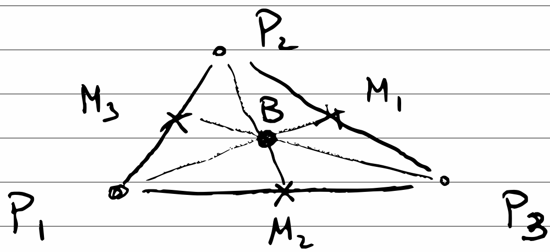


$\mathrm{Area}(T_3) = \frac{1}{}$

$$\mathrm{Area}(T_3) = \frac{1}{2} |\det (P_2 - P_1 \mid P - P_1)|$$

$\blacksquare$

Def: Il baricentro di un triangolo è definito come l'intersezione delle sue mediane



Prop.: $B = \frac{1}{3}(P_1+P_2+P_3)$.

dim: I punti medi dei 3 lati sono

$$M_1 = \frac{1}{2}(P_2+P_3)$$
$$M_2 = \frac{1}{2}(P_1+P_3)$$
$$M_3 = \frac{1}{2}(P_1+P_2)$$

Intersechiamo i segmenti $\overline{P_1M_1}$ e $\overline{P_2M_2}$

$$t\,P_1+(1-t)M_1 = s\,P_2+(1-s)M_2$$

$\Rightarrow$

$$t P_1 + \frac{(1-t)}{2}(P_2 + P_3) = s P_2 + \frac{1-s}{2}(P_1 + P_3)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t = \frac{1-s}{2} \\ \left.\begin{array}{l} \frac{1-t}{2} = s \\ \frac{1-t}{2} = \frac{1-s}{2} \end{array}\right] \Rightarrow s = \frac{1-s}{2} \Rightarrow 2s = 1-s \end{cases}$$

$$\Rightarrow s = \frac{1}{3} \Rightarrow t = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \overline{P_1 M_1} \cap \overline{P_2 M_2} = \left\{ \frac{1}{3} P_1 + \frac{1}{3} P_2 + \frac{1}{3} P_3 \right\}.$$

$\blacksquare$

<u>OSS</u>: Il baricentro di un triangolo è l'unico punto che divide il triangolo in tre triangoli aventi la stessa area. Infatti, dal Teorema segue che i 3 triangoli corrispondenti al baricentro hanno area uguale a $\frac{1}{3}$ Area(T). Viceversa se $P = t_1 P_1 + t_2 P_2 + t_3 P_3 \in T$ t.c. Area(T_1) = Area(T_2) = Area(T_3) allora dal Teorema segue $t_1 = t_2 = t_3$.