Matrici elementari

Vogliamo discutere la seguente affermazione
"L'effetto di una operazione elementare sulle righe di una matrice è uguale alla moltiplicazione a sinistra per una matrice invertibile che si chiama matrice elementare".

Ricordiamo che ci sono 3 op. elementari

(R1) $R_i \longleftrightarrow R_j$

(R2) $R_i \longmapsto \lambda R_i$ (per qualche scalare $\lambda \neq 0$)

(R3) $R_i \longmapsto R_i + c R_j$ (per qualche $c \in \mathbb{K}$)

Vediamo (R1):

Consideriamo la seguente matrice $m \times m$:

per $1 \leq i \neq j \leq m$ definiamo $P_{ij} \in Mat_{m \times m}$:

$$(P_{ij})_K = \begin{cases} (\mathbb{1}_m)_K & \text{se } K \neq i \text{ e } K \neq j \\ (\mathbb{1}_m)_i & \text{se } K = j \\ (\mathbb{1}_m)_j & \text{se } K = i \end{cases}$$

ovvero P_{ij} è la matrice ottenuta da $\mathbb{1}_m$ scambiando la riga i-esima con la riga j-esima.

$$\boxed{\mathbb{1}_m \xrightarrow[R_i \longleftrightarrow R_j]{} P_{ij}}$$

<u>OSS</u>: L'indice m è omesso dalla notazione P_{ij}

<u>Es</u>: $m=2$: $P_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$m=3$:

$$P_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

·) $m=2$. Se $A=\begin{pmatrix} x & y & z \\ a & b & c \end{pmatrix}$ allora

$$P_{12}A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y & z \\ a & b & c \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b & c \\ x & y & z \end{pmatrix}$$

·) $m=3$.
Se $A=\begin{pmatrix} x & y \\ a & b \\ e & m \end{pmatrix}$ allora

$$P_{12}A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ a & b \\ e & m \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b \\ x & y \\ e & m \end{pmatrix}$$

In entrambe i casi, $A \underset{R_1 \leftrightarrow R_2}{\rightsquigarrow} P_{12}A$.

È un fatto generale:

<u>Prop.</u>: Data $A \in Mat_{m\times n}$ e $P_{ij} \in Mat_{m\times m}$ la matrice $B=P_{ij}A$ è ottenuta da A scambiando la riga i-esima con la riga j-esima.

<u>dim</u>: Vediamo chi è la k-esima riga di $P_{ij}A$

Se $k\neq i$ e $k\neq j$

$$(P_{ij}A)_k=(P_{ij})_k A=(\mathbb{1}_m)_k A=e_k^t A$$

$$=(A^t e_k)^t=\left((A^t)^k\right)^t=(A_k^t)^t=A_k$$

Se $k=i$

$$(P_{ij}A)_k = (P_{ij}A)_i = (P_{ij})_i A$$
$$= (\mathbb{1}_m)_j A = e_j^t A = (A^t e_j)^t$$
$$= ((A^t)^j)^t = (A_j^t)^t = A_j$$

Se $k=j$

$$(P_{ij}A)_j = (P_{ij})_j A = (\mathbb{1}_m)_i A = e_i^t A$$
$$= (A^t e_i)^t = ((A^t)^i)^t = A_i$$

$\boxtimes$

<u>OSS</u>: P_{ij} è invertibile e $P_{ij}^{-1} = P_{ij}$.

infatti:

$$P_{ij} \rightsquigarrow \mathbb{1}_m \quad \text{e} \quad P_{ij}P_{ij} = \mathbb{1}_m.$$

$\boxtimes$

<u>Esercizio</u>: ·) $(AB)_i = A_i B$

·) $e_i^t B = B_i$

Vediamo (R2):

Dato $n \geq 1$, $i \in \{1, \dots, n\}$ e $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ consideriamo la matrice diagonale

$$D_i^{(n)}(\lambda) = D_i(\lambda) = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & 1 & & & \\ 0 & \cdots & & \lambda & 0 & \cdots \\ & & & & 1 & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix} & \leftarrow i \end{array}$$

$$= \operatorname{diag}(1, \dots, 1, \underset{\substack{\uparrow \\ i}}{\lambda}, 1, \dots, 1)$$

ovvero

$$\left(D_i(\lambda)\right)_k = \begin{cases} (\mathbb{1}_n)_k & \text{se } k \neq i \\ \lambda(\mathbb{1}_n)_k & \text{se } k = i \end{cases}$$

$D_i(\lambda)$ si ottiene da $\mathbb{1}_n$ moltiplicando la i-esima riga per λ

$$\boxed{\mathbb{1}_n \xrightarrow[R_i \mapsto \lambda R_i]{} D_i(\lambda)}$$

Es: $m=2$ $\qquad A=\begin{pmatrix} a & b & c \\ x & y & z \end{pmatrix}$

$$D_1(\lambda)A=\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b & c \\ x & y & z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \lambda a & \lambda b & \lambda c \\ x & y & z \end{pmatrix}$$

e quindi $A \underset{R_1 \mapsto \lambda R_1}{\rightsquigarrow} D_1(\lambda)A$.

Prop.: Data $A \in Mat_{m\times n}$, dato $\lambda \in \mathbb{K}\setminus\{0\}$ ed un indice $1 \le i \le m$ si ha

$$A \underset{R_i \mapsto \lambda R_i}{\rightsquigarrow} D_i(\lambda)A$$

dim:

Per $k \neq i$

$$\big(D_i(\lambda)A\big)_k = D_i(\lambda)_k A = e_k^t A = A_k$$

Inoltre

$$\big(D_i(\lambda)A\big)_i = D_i(\lambda)_i A = \lambda e_i^t A = \lambda A_i.$$

$\boxtimes$

OSS: $D_i(\lambda)$ è invertibile e $D_i(\lambda)^{-1} = D_i\left(\frac{1}{\lambda}\right)$

Infatti:

$$D_i(\lambda) \overset{R_i \mapsto \lambda^{-1} R_i}{\rightsquigarrow} \mathbb{1}_m \Rightarrow \mathbb{1}_m = D_i(\lambda^{-1})D_i(\lambda),$$

Vediamo (R3):

Dato $m \geq 1$ e due indici $1 \leq i \neq j \leq m$ ed uno scalare $c \in \mathbb{K}$, definiamo la matrice $F_{ij}(c) \in Mat_{m \times m}$ come la matrice la cui riga k-esima è

$$\left(F_{ij}(c)\right)_k = \begin{cases} (\mathbb{1}_m)_k & \text{se } k \neq i \\ (\mathbb{1}_m)_i + c\,(\mathbb{1}_m)_j & \text{se } k = i \end{cases}$$

ovvero essa è la matrice data da

$$\mathbb{1}_m \xrightarrow[R_i \mapsto R_i + cR_j]{} F_{ij}(c).$$

<u>NB</u>: Anche in questo caso, omettiamo di scrivere m nella notazione.

<u>Es</u>: $m=2$: $F_{12}(c) = \begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $F_{21}(c) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix}$

$m=3$:

$$F_{12}(c) = \begin{pmatrix} 1 & c & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad F_{21}(c) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ c & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad F_{32}(c) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & c & 1 \end{pmatrix}$$

Per definizione, $F_{ij}(c)$ ha c al posto (i,j), 1 al posto (k,k) per ogni $k=1,\dots,m$ e 0 negli altri posti:

$$F_{ij}(\lambda)=\begin{array}{cc}\left(\begin{array}{ccccccc} 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & 0 & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & & & \vdots \\ \vdots & & & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & c & \cdots\ 0 & 1 & 0 \cdots 0 \\ \vdots & & & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{array}\right) & \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ i \\ \\ \\ \end{array} \\ \begin{array}{ccccccc} \quad & \quad & \quad & j & \quad & \quad & \quad \end{array} & \end{array}$$

Es: $m=2$ $\quad A=\begin{pmatrix} a & b & c \\ x & y & z \end{pmatrix}$

$$F_{12}(\lambda)A=\begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b & c \\ x & y & z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a+\lambda x & b+\lambda y & c+\lambda z \\ x & y & z \end{pmatrix}$$

$$F_{21}(\lambda)A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b & c \\ x & y & z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b & c \\ x+\lambda a & y+\lambda b & z+\lambda c \end{pmatrix}$$

$$A \xrightarrow[R_1 \mapsto R_1+\lambda R_2]{} F_{12}(\lambda)A$$

$$A \xrightarrow[R_2 \mapsto R_2+\lambda R_1]{} F_{21}(\lambda)A$$

Prop.: Data $A \in Mat_{m \times n}$, dati due indici $1 \leq i \neq j \leq m$ e uno scalare $c \in \mathbb{K}$ si ha

$$A \xrightarrow[R_i \mapsto R_i + cR_j]{} F_{ij}(c) A$$

dim:

$$\left(F_{ij}(c) A\right)_i = F_{ij}(c)_i A = \left(e_i + c e_j\right)^t A$$
$$= \left(e_i^t + c e_j^t\right) A = e_i^t A + c e_j^t A$$
$$= A_i + c A_j$$

Se $k \neq i$:

$$\left(F_{ij}(c) A\right)_k = F_{ij}(c)_k A = e_k^t A = A_k$$

$\blacksquare$

OSS: $F_{ij}(c)$ è invertibile e $F_{ij}(c)^{-1} = F_{ij}(-c)$

Infatti

$$F_{ij}(c) \xrightarrow[R_i \mapsto R_i - \lambda R_j]{} \mathbb{1}_m$$

$$\Rightarrow \mathbb{1}_m = F_{ij}(-c) F_{ij}(c)$$

Def: Le matrici P_{ij}, $D_i(\lambda)$, $F_{ij}(c)$ si chiamano <u>matrici elementari</u> di tipo R1, R2, R3, rispettivamente.

<u>OSS</u>: $F_{ij}(c)$ a rigore non dovrebbe chiamarsi matrice elementare, se $c \neq 1$, perché $R_i \mapsto R_i + cR_j$ non è stata definita come operazione elementare. Questa operazione è la composizione di operazioni elementari. In effetti

$$F_{ij}(c) = D_j(c^{-1})\, F_{ij}(1)\, D_j(c)$$

$$= D_j(c)^{-1}\, F_{ij}(1)\, D_j(c)$$

<u>Es</u>:

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \rightsquigarrow \underset{\substack{\shortparallel \\ D_1(\lambda)}}{\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}} \rightsquigarrow \underset{\substack{\shortparallel \\ F_{21}(1)\, D_1(\lambda)}}{\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ \lambda & 1\end{pmatrix}} \rightsquigarrow \underset{\substack{\shortparallel \\ D_1(\lambda^{-1})\, F_{12}(1)\, D_1(\lambda)}}{\begin{pmatrix}1 & 0\\ \lambda & 1\end{pmatrix}} = F_{21}(\lambda)$$

Quindi le operazioni elementari sulle righe sono moltiplicazioni sinistre per opportune matrici elementari: ovvero se $A \underset{R}{\leadsto} B$ allora esistono opportune matrici elementari $E_1, E_2, \dots, E_K$ t.c.

$$A \underset{R}{\leadsto} E_1 A \underset{R}{\leadsto} E_2 E_1 A \underset{R}{\leadsto} \dots \underset{R}{\leadsto} E_K \cdots E_2 E_1 A = B$$

Es:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \leadsto \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}_{E_1 A} \leadsto \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}_{E_2 E_1 A} \leadsto \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{E_3 E_2 E_1 A}$$

dove

$$E_1 = F_{21}(-2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E_2 = F_{12}(2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E_3 = D_2(-1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

In particolare, $E_3 \cdot E_2 E_1 = A^{-1}$

- **TEOREMA:**

Sia $A, B \in Mat_{m \times n}$ due matrici equivalenti per righe. Allora

1) $\exists$ $T \in Mat_{m \times m}$ invertibile tale che
$$B = TA$$

2) La matrice T è il prodotto di matrici elementari e si trova eseguendo su $[A|\mathbb{1}_m]$ le operazioni che trasformano A in B:
$$[A|\mathbb{1}_m] \underset{R}{\rightsquigarrow} [B|T].$$

dim:

1) Dato che $A \underset{R}{\rightsquigarrow} B$, allora esistono matrici elementari $E_1, \dots, E_k$ t.c.
$$B = E_k \cdots E_2 E_1 A.$$
Dato che ogni E_i è invertibile, anche il loro prodotto
$$T := E_k \cdots E_2 E_1 \text{ lo è.}$$

2) $T[A|\mathbb{1}_m] = [TA|T] = [B|T]$ ☒

COROLLARIO:

Una matrice è invertibile se e solo se è prodotto di matrici elementari.

dim:

$A \in Mat_{m \times m}$ è invertibile se e solo se $rref(A) = \mathbb{1}_m$.

Quindi $\exists$ matrici elementari $E_1, \dots, E_k$ t.c. $E_k \cdots E_1 A = \mathbb{1}_m$.

Quindi,

$$A = E_1^{-1} E_2^{-1} \cdots E_k^{-1}$$

è prodotto di matrici elementari (le inverse di matrici elementari sono elementari).

$\boxtimes$

Operazioni elementari sulle colonne

Se moltiplichiamo una matrice A a destra per una matrice elementare, allora l' operazione elementare viene eseguita sulle colonne di A:

Per vedere questo fatto osserviamo che

$$P_{ij}^{t} = P_{ij}$$

$$D_i(\lambda)^t = D_i(\lambda)$$

$$F_{ij}(c)^t = F_{ji}(c)$$

(Esercizio!)

Quindi

1) $B = A P_{ij} \Rightarrow B^t = P_{ij}^t A^t = P_{ij} A$

Ne segue che B è ottenuta da A scambiando la colonna i-esima con la colonna j-esima

Es: $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$$A P_{12} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & a \\ d & c \end{pmatrix}$$

2) $B = A D_i(\lambda) \Rightarrow B^t = D_i(\lambda)^t A^t = D_i(\lambda) A$

Ne segue che $B = D_i(\lambda) A$ è ottenuta da A moltiplicando l'i-esima colonna per λ

Es: $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$$A D_2(\lambda) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & \lambda b \\ c & \lambda d \end{pmatrix}$$

3) $B = A F_{ij}(c) \Rightarrow B^t = F_{ij}(c)^t A^t = F_{ji}(c) A^t$

Ne segue che $B = A F_{ij}(c)$ si ottiene da A sostituendo la j-esima colonna con c-volte l'i-esima colonna.

Es: $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$$A F_{12}(\lambda) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & \lambda a + b \\ c & \lambda c + d \end{pmatrix}$$