Matrici associate ad un'applicazione lineare.

Siano V e W due spazi vettoriali su $\mathbb{K}$ e siano $\mathcal{B}_1 = \{v_1, \dots, v_n\} \subset V$ e $\mathcal{B}_2 = \{w_1, \dots, w_m\} \subset W$ basi.

Sia $\mathcal{L}: V \longrightarrow W$ lineare.

Abbiamo

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\mathcal{L}"] \arrow[d, shift right, "F_{\mathcal{B}_1}"'] & W \arrow[d, "F_{\mathcal{B}_2}"] \\ \mathbb{K}^n \arrow[u, shift right, "F_{\mathcal{B}_1}^{-1}"'] & \mathbb{K}^m \end{tikzcd}$$

La composizione

$$F_{\mathcal{B}_2} \circ \mathcal{L} \circ F_{\mathcal{B}_1}^{-1} : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^m$$

è lineare e quindi esiste una matrice $A \in Mat_{m \times n}$ t.c.

$$\boxed{F_{\mathcal{B}_2} \circ \mathcal{L} \circ F_{\mathcal{B}_1}^{-1} = S_A}$$

A si chiama la matrice associata ad $\mathcal{L}$ nelle basi $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$.

In altre parole, A è l'unica matrice che <u>rende commutativo</u> il seguente diagramma

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\mathcal{L}"] \arrow[d, "F_{\mathcal{B}_1}"'] & W \arrow[d, "F_{\mathcal{B}_2}"] \\ \mathbb{K}^n \arrow[r, "A"'] & \mathbb{K}^m \end{tikzcd}$$

questo vuol dire: $S_A \circ F_{\mathcal{B}_1} = F_{\mathcal{B}_2} \circ \mathcal{L}$.

Com'è fatta A?

$$A^i = S_A(e_i) = F_{\mathcal{B}_2} \circ \mathcal{L} \circ F_{\mathcal{B}_1}^{-1}(e_i)$$

$$= F_{\mathcal{B}_2} \circ \mathcal{L}\,(v_i) = F_{\mathcal{B}_2}(\mathcal{L}(v_i))$$

"La colonna i-esima di A è composta dalle coordinate di $\mathcal{L}(v_i)$ nella base $\mathcal{B}_2$".

OSS (Importante):

Sia $\mathcal{L}: K^n \longrightarrow \mathbb{K}^m$ lineare.

Allora $\mathcal{L} = S_A$. Ricordiamo che

$$A = (\mathcal{L}(e_1) | \dots | \mathcal{L}(e_n))$$

Quindi A è la matrice che rappresenta $\mathcal{L}$ nelle basi standard $\mathcal{C}_n = \{e_1, \dots, e_n\} \subset K^n$ e $\mathcal{C}_m = \{e_1, \dots, e_m\} \subset \mathbb{K}^m$.

Perché è utile A?

Per studiare $\operatorname{Ker} \mathcal{L}$ e $\operatorname{Im} \mathcal{L}$.

Infatti,

$$F_{\mathcal{B}_1}(\operatorname{Ker} \mathcal{L}) = \operatorname{Ker} A \quad \text{e} \quad F_{\mathcal{B}_2}(\operatorname{Im} \mathcal{L}) = \operatorname{Col} A.$$

Quindi se

$$\{v_1, \dots, v_K\} \overset{\text{base}}{\subset} \operatorname{Ker} A \Rightarrow \{F_{\mathcal{B}_1}^{-1}(v_1), \dots, F_{\mathcal{B}_1}^{-1}(v_K)\} \overset{\text{base}}{\subset} \operatorname{Ker} \mathcal{L}$$

$$\{w_1, \dots, w_K\} \overset{\text{base}}{\subset} \operatorname{Col} A \Rightarrow \{F_{\mathcal{B}_2}^{-1}(w_1), \dots, F_{\mathcal{B}_2}^{-1}(w_K)\} \overset{\text{base}}{\subset} \operatorname{Im} \mathcal{L}.$$

<u>Es</u>: Sia $\mathcal{B} = \left\{ v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathbb{R}^2$, e sia $\mathcal{L} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare tale che

$$\mathcal{L}(v_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{L}(v_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Trovare la matrice che rappresenta $\mathcal{L}$ nelle basi $\mathcal{B} \subset \mathbb{R}^2$ e $\mathcal{E}_3 = \{e_1, e_2, e_3\} \subset \mathbb{R}^3$. Trovare base e dimensione di $\operatorname{Ker} \mathcal{L}$ e di $\operatorname{Im} \mathcal{L}$.

<u>Sol.</u>:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^2 \arrow[r, "\mathcal{L}"] \arrow[d, "F_{\mathcal{B}}"'] & \mathbb{R}^3 \arrow[d, "F_{e_3}"] \\ \mathbb{R}^2 \arrow[r] & \mathbb{R}^3 \end{tikzcd}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

<u>NB</u>: $\mathcal{L} \neq S_A$: $S_A(v_1) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\operatorname{Ker} \mathcal{L} \simeq \operatorname{Ker} A \quad \text{e} \quad \operatorname{Im} \mathcal{L} \simeq \operatorname{Im} A = \operatorname{Col}(A)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \operatorname{rg} A = 2 \Rightarrow \operatorname{Ker} A = \{0_{\mathbb{R}^2}\} \Rightarrow \operatorname{Ker} \mathcal{L} = \{0_{\mathbb{R}^2}\}$

$\Rightarrow \mathcal{L}$ è iniettiva.

$$\mathrm{Im}\,A = \langle A^1, A^2 \rangle = \left\langle \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\Rightarrow \mathrm{Im}\,\mathcal{L} = \left\langle F_{e_3}^{-1}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, F_{e_3}^{-1}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \right\rangle$$

$$= \left\langle \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \right\rangle.$$

$\boxtimes$

<u>Es</u>: Sia V uno spazio vettoriale reale con base $\mathcal{B}_1 = \{v_1, v_2, v_3\}$ e W uno spazio vettoriale reale con base $\mathcal{B}_2 = \{w_1, w_2\}$. Sia $\mathcal{L}: V \to W$ l'applicazione lineare t.c.

$$\mathcal{L}(v_1) = 2w_1 + w_2$$

$$\mathcal{L}(v_2) = w_1 - w_2$$

$$\mathcal{L}(v_3) = 3w_1$$

Trovare una base di $\mathrm{Ker}\,\mathcal{L}$ ed una base di $\mathrm{Im}\,\mathcal{L}$.

<u>Sol</u>:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\mathcal{L}"] \arrow[d, "F_{\mathcal{B}_1}"'] & W \arrow[d, "F_{\mathcal{B}_2}"] \\ \mathbb{R}^3 \arrow[r, "A"] & \mathbb{R}^2 \end{tikzcd}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \operatorname{rg} A = 2 \Rightarrow \dim \operatorname{Im} \mathcal{L} = 2$

$\Rightarrow \mathcal{L}$ è suriettiva.

$$\operatorname{Ker} A = \operatorname{Ker} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \,\middle|\, \begin{matrix} x_1 = -x_3 \\ x_2 = -x_3 \end{matrix} \right\}$$

$$= \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\Rightarrow \operatorname{Ker} \mathcal{L} = \left\langle F_{\mathcal{B}_1}^{-1} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \langle -v_1 - v_2 + v_3 \rangle$$

Una base di $\operatorname{Ker} \mathcal{L}$ è $\{-v_1 - v_2 + v_3\}$. $\boxtimes$

<u>Es</u>: $\mathcal{L} : \overset{V}{\overset{\shortparallel}{\mathbb{R}[x]_{\leq 2}}} \to \overset{W}{\overset{\shortparallel}{\mathbb{R}[x]_{\leq 3}}}$ data da

$$\mathcal{L}(p(x)) = x^2 p'(x+1)$$

$\mathcal{L}$ è lineare in quanto composizione di applicazioni lineari

$$V \longrightarrow V \longrightarrow V \longrightarrow W$$

$$p \longmapsto p(x+1)$$

$$q(x) \longmapsto q'(x)$$

$$t(x) \longmapsto x^2 t(x)$$

<u>Esercizio</u>: Verificare che $p(x) \mapsto p(x+1)$ è lineare.

- Consideriamo le basi standard

$\mathcal{E}_2 = \{1, x, x^2\} \subset V$, $\mathcal{E}_3 = \{1, x, x^2, x^3\} \subset W$.

Vediamo come agisce $\mathcal{L}$:

$\mathcal{L}(1) = x^2 \cdot 0 = 0$

$\mathcal{L}(x) = x^2 \cdot 1 = x^2$

$\mathcal{L}(x^2) = x^2\, 2(x+1) = 2x^3 + 2x^2$

La matrice che rappresenta $\mathcal{L}$ in queste basi è quindi

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{Ker} A = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x_2 = x_3 = 0 \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\Rightarrow \operatorname{Ker} \mathcal{L} = \langle F_{e_2}^{-1}(e_1) \rangle = \langle 1 \rangle$$

$$\operatorname{Im} A = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \langle e_3, e_4 \rangle$$

$$\Rightarrow \operatorname{Im} \mathcal{L} = \langle F_{e_3}^{-1}(e_3), F_{e_3}^{-1}(e_4) \rangle = \langle x^2, x^3 \rangle$$

$\boxtimes$

Matrici associate ad isomorfismi lineari

Sia $\mathcal{L}: V \to W$ un isomorfismo lineare tra spazi vettoriali f.g..

Vogliamo studiare come sono fatte le matrici che rappresentano $\mathcal{L}$.

Osserviamo che valgono le seguenti caratterizzazioni :

$\mathcal{L}$ è un isomorfismo lineare

$\Updownarrow$

$\mathcal{L}$ lineare, $\operatorname{Ker} \mathcal{L} = \{0_V\}$, $\operatorname{Im} \mathcal{L} = W$

$\Updownarrow$

$\mathcal{L}$ lineare, $\mathcal{L}$ manda basi di V in basi di W

$\Updownarrow$

$\mathcal{L}$ lineare, $\dim V = \dim W$, $\operatorname{Ker} \mathcal{L} = \{0_V\}$.

Ricordiamo inoltre che l'inversa di $\mathcal{L}$ si denota con $\mathcal{L}^{-1}$.

Cominciamo con il caso particolare in cui $V = W$ e $\mathcal{L} = Id_V$:

Matrice del cambiamento di base

Siano $\mathcal{B}_1 = \{v_1, \dots, v_n\}$ e $\mathcal{B}_2 = \{w_1, \dots, w_n\}$ due basi di uno spazio vettoriale V.

La matrice $B \in Mat_{n \times n}$ t.c.

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "Id_V"] \arrow[d, "F_{\mathcal{B}_1}"'] & V \arrow[d, "F_{\mathcal{B}_2}"] \\ \mathbb{K}^n \arrow[r] & \mathbb{K}^n \end{tikzcd}$$

si chiama <u>matrice del cambiamento di base dalla base $\mathcal{B}_2$ alla base $\mathcal{B}_1$</u>.

Com'è fatta B?

$$B^i = Be_i = F_{\mathcal{B}_2} \circ F_{\mathcal{B}_1}^{-1}(e_i) = F_{\mathcal{B}_2}(v_i)$$

"La i-esima colonna di B è composta dalle coordinate di v_i nella base $\mathcal{B}_2$".

- Perché si dice da $\mathcal{B}_2$ a $\mathcal{B}_1$, mentre la freccia punta verso $\mathcal{B}_2$?

Il motivo è che le colonne di B contengono le coordinate degli elementi di $\mathcal{B}_1$ nella base $\mathcal{B}_2$:

$$v_i = b_{1i} w_1 + b_{2i} w_2 + \dots + b_{ni} w_n .$$

<u>Es</u>: $V = \mathbb{R}^2$. Consideriamo le basi $\mathcal{B}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$, $\mathcal{C}_2 = \left\{ e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

La matrice di cambiamento di base <u>dalla</u> base canonica $\mathcal{C}_2$ alla base $\mathcal{B}_2$ è $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Notiamo che B ha per colonne gli elementi di $\mathcal{B}_1$.

Es: $V = \mathbb{R}[x]_{\leq 1}$ e consideriamo la base $\mathcal{B}_1 = \{1+x, 1-x\}$ e la base canonica $\mathcal{C} = \{1, x\}$.

La matrice di cambiamento di base dalla base canonica alla base $\mathcal{B}_1$ è $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Notiamo che le colonne di B sono i coefficienti dei polinomi che formano $\mathcal{B}$.

Questi due esempi si generalizzano:

In $\mathbb{K}^n$ e $\mathbb{K}[x]_{\leq n-1}$ ci sono basi standard

$$\mathcal{E}_n = \{e_1, \dots, e_n\} \subset \mathbb{K}^n \quad e$$

$$\mathcal{E}_n = \{1, x, \dots, x^n\} \subset \mathbb{K}[x]_{\leq n}$$

Se $V = \mathbb{K}^n$ e $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ è una base di V, allora la matrice di cambiamento di base <u>da</u> $\mathcal{E}_n$ <u>a</u> $\mathcal{B}$ è

$$B = (v_1 | \dots | v_n) \quad :$$

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{K}^n \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d, "F_{\mathcal{B}}"'] & \mathbb{K}^n \arrow[d, "F_e"] \\
\mathbb{K}^n \arrow[r] & \mathbb{K}^n
\end{tikzcd}$$

$$B = (v_1 | \dots | v_n)$$

Se $V = \mathbb{K}[x]_{\le n}$ e $\mathcal{B} = \{p_1, \dots, p_{n+1}\}$
è una base di V allora
la matrice di cambiamento di base
dalla <u>base canonica</u> $\mathcal{e}_n$ a $\mathcal{B}$
è la matrice

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1,n+1} \\ b_{21} & b_{22} & & b_{2,n+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n+1,1} & b_{n+1,1} & & b_{n+1,n+1} \end{pmatrix}$$

tale che

$$p_i(x) = b_{1i} + b_{2i}x + b_{3i}x^2 + \dots + b_{n+1,i}\, x^n$$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{K}[x]_{\le n} \arrow[r, equal] \arrow[d, "F_{\mathcal{B}}"'] & \mathbb{K}[x]_{\le n} \arrow[d, "F_{\mathcal{e}_n}"] \\ \mathbb{K}^{n+1} \arrow[r, "B"'] & \mathbb{K}^{n+1} \end{tikzcd}$$

Es: $V = \mathbb{R}^3$, $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$

La matrice di cambiamento di base dalla base canonica $\mathcal{E}_3 = \{e_1, e_2, e_3\}$ a $\mathcal{B}$ è B:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^3 \arrow[r, "Id_{\mathbb{R}^3}"] \arrow[d, "F_{\mathcal{B}}"'] & \mathbb{R}^3 \arrow[d, "F_{\mathcal{E}} = Id_{\mathbb{R}^3}"] \\ \mathbb{R}^3 \arrow[r] & \mathbb{R}^3 \end{tikzcd}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Es: $V = \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$, $\mathcal{B} = \{1 + x + x^2, 1 - x, 2 + 3x\}$

La matrice di cambiamento di base dalla base canonica $\mathcal{E}_2 = \{1, x, x^2\}$ a $\mathcal{B}$ è B:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}[x]_{\leq 2} \arrow[r, "Id_{\mathbb{R}[x]_{\leq 2}}"] \arrow[d, "F_{\mathcal{B}}"'] & \mathbb{R}[x]_{\leq 2} \arrow[d, "F_{\mathcal{E}_2}"] \\ \mathbb{R}^3 \arrow[r] & \mathbb{R}^3 \end{tikzcd}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Prop. (Importante):

Sia $B \in Mat_{n \times n}(\mathbb{K})$ una matrice quadrata. Allora

B è una matrice di cambiamento di base

$$\Updownarrow$$

S_B è invertibile.

dim:

$\Downarrow$) Se B è una matrice di cambiamento di base, esiste uno spazio vettoriale V e due basi $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$ di V tali che il diagramma

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "Id_V"] \arrow[d, "F_{\mathcal{B}_1}"'] & V \arrow[d, "F_{\mathcal{B}_2}"] \\ \mathbb{K}^n \arrow[r, "S_B"] & \mathbb{K}^n \end{tikzcd}$$

commuta. Allora $\operatorname{Ker} S_B \simeq \operatorname{Ker} Id_V = \{0_V\}$,

Quindi $\dim \operatorname{Ker} S_B = 0$ e quindi S_B è invertibile.

$\Uparrow$) Supponiamo che S_B sia invertibile. Allora abbiamo il diagramma commutativo

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{K}^n \arrow[r, "Id_{\mathbb{K}^n}"] \arrow[d, "S_B^{-1}"'] & \mathbb{K}^n \arrow[d, "Id_{\mathbb{K}^n}"] \\
\mathbb{K}^n \arrow[r, "S_B"] & \mathbb{K}^n
\end{tikzcd}$$

Dobbiamo dimostrare che le frecce verticali sono funzioni "coordinate in una base". Abbiamo già osservato che

$$Id_{\mathbb{K}^n} = F_{e_n}.$$

Occupiamoci di S_B^{-1}. Osserviamo che

$$S_B : \begin{array}{l} e_1 \longmapsto B^1 \\ e_2 \longmapsto B^2 \\ \vdots \\ e_n \longmapsto B^n \end{array} \quad , \quad S_B^{-1} : \begin{array}{l} B^1 \longmapsto e_1 \\ B^2 \longmapsto e_2 \\ \vdots \\ B^n \longmapsto e_n \end{array}$$

Quindi, $S_B^{-1} = F_{\mathcal{B}}$ dove

$\mathcal{B} = \{B^1, \dots, B^n\}$. $\boxtimes$

Def: Una matrice B si dice *invertibile* se S_B è invertibile.

Se C è la matrice tale che $S_B^{-1} = S_C$, C si chiama l'*inversa* di B e si denota con B^{-1}.

Quindi $S_B^{-1} = S_{B^{-1}}$.

OSS: B è invertibile

$$\Updownarrow$$

B è quadrata, $\operatorname{Ker} B = \{0\}$.

Sia $\mathcal{L}: V \longrightarrow W$ un isomorfismo lineare. Sia $\mathcal{B}_V \subset V$ una base di V e sia $\mathcal{B}_W \subset W$ una base di W.

Sia B la matrice che rappresenta $\mathcal{L}$ nelle basi $\mathcal{B}_V$ e $\mathcal{B}_W$.

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "\mathcal{L}"] \arrow[d, "F_{\mathcal{B}_V}"'] & W \arrow[d, "F_{\mathcal{B}_W}"] \\
\mathbb{K}^n \arrow[r, "B"'] & \mathbb{K}^n
\end{tikzcd}$$

Allora B è invertibile.

D'altro lato, Id_V è invertibile.

Quindi otteniamo:

B rappresenta un isomorfismo lineare

$$\Updownarrow$$

B è invertibile.

Matrice Identità:

Def: Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n.
La <u>matrice identità $n \times n$</u> è la matrice che rappresenta Id_V in una base $\mathcal{B}_V$ di V (sia in partenza che in arrivo) e si denota con $\mathbb{1}_n$:

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, equal] \arrow[d, "F_{\mathcal{B}_V}"'] & V \arrow[d, "F_{\mathcal{B}_V}"] \\
\mathbb{K}^n \arrow[r, "\mathbb{1}_n"'] & \mathbb{K}^n
\end{tikzcd}$$

Quindi, $\mathbb{1}_n = (e_1 | e_2 | \cdots | e_n) \in Mat_{n \times n}(\mathbb{K})$.

Ad esempio: $\mathbb{1}_1 = (1)$, $\mathbb{1}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbb{1}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\mathbb{1}_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, ..., $\mathbb{1}_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$

OSS: $S_{\mathbb{1}_n} = Id_{\mathbb{K}^n}$.

Applicazioni lineari simili

Due funzioni lineari

$$\mathcal{L}_1 : V_1 \to W_1 \quad \text{e} \quad \mathcal{L}_2 : V_2 \to W_2$$

si dicono <u>simili</u> se esistono due isomorfismi lineari

$$F_1 : V_1 \xrightarrow{\simeq} V_2 \quad \text{e} \quad F_2 : W_1 \xrightarrow{\simeq} W_2$$

tali che il diagramma

$$\begin{array}{ccc} V_1 & \xrightarrow{\mathcal{L}_1} & W_1 \\ F_1 \downarrow & & \downarrow F_2 \\ V_2 & \xrightarrow{\mathcal{L}_2} & W_2 \end{array}$$

commuta, i.e. $\mathcal{L}_2 \circ F_1 = F_2 \circ \mathcal{L}_1$.
(Poiché F_1 e F_2 sono invertibili questo è equivalente a $\mathcal{L}_2 = F_2 \circ \mathcal{L}_1 \circ F_1^{-1}$).
In questo caso scriviamo

$$\mathcal{L}_1 \sim \mathcal{L}_2$$

e diciamo "$\mathcal{L}_1$ è simile a $\mathcal{L}_2$".

__Esercizio__: La relazione di similitudine è una relazione di equivalenza, i.e.

1) $\mathcal{L}_1 \sim \mathcal{L}_1$ (riflessiva)

2) $\mathcal{L}_1 \sim \mathcal{L}_2 \Rightarrow \mathcal{L}_2 \sim \mathcal{L}_1$ (simmetrica)

3) $\mathcal{L}_1 \sim \mathcal{L}_2,\ \mathcal{L}_2 \sim \mathcal{L}_3 \Rightarrow \mathcal{L}_1 \sim \mathcal{L}_3$ (transitiva)

Osserviamo che se

$$(\mathcal{L}_1 : V_1 \to W_1) \sim (\mathcal{L}_2 : V_2 \to W_2)$$

allora $\dim V_1 = \dim W_2$ e $\dim W_1 = \dim W_2$.

Il viceversa non è vero:

ad esempio $Id_{\mathbb{R}} \not\sim 0$. Infatti se

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{L}_1 & \mathbb{R} \arrow[r, "Id_{\mathbb{R}}"] \arrow[d, "F_1"'] & \mathbb{R} \arrow[d, "F_2"] \\
\mathcal{L}_2 & \mathbb{R} \arrow[r, "0"] & \mathbb{R}
\end{tikzcd}$$

commutasse, allora

$$F_2 = F_2 \circ Id_{\mathbb{R}} = 0 \circ F_1 = 0$$

e quindi F_2 non può essere un isomorfismo.

Ricordiamo che il <u>rango</u> di una applicazione lineare $\mathcal{L}$ è la dimensione della sua immagine e si denota con $rg(\mathcal{L})$:

$$rg(\mathcal{L}) = \dim \operatorname{Im} \mathcal{L}.$$

<u>Es</u>: •) Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{1}_2 & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$

$$rg(A) = 2.$$

•) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{1}_1 & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow rg\,A = 1$

•) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{1}_3 \Rightarrow rg(A) = 3.$

Prop.: Sia $\mathcal{L}: V \to W$ una f.ne lineare di rango r. Allora esiste una base $\mathcal{B}_V$ di V ed una base $\mathcal{B}_W$ di W nelle quali $\mathcal{L}$ è rappresentata dalla matrice

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} r & n-r \end{array} \\ \begin{array}{c} r \\ m-r \end{array} & \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{1}_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) \end{array}$$

dim: Sia $\mathcal{B}_V = \{v_1, \dots, v_r, v_{r+1}, \dots, v_n\}$ una base di V ottenuta estendendo una base

$$\mathcal{B}_{\mathrm{Ker}\,\mathcal{L}} = \{v_{r+1}, \dots, v_n\}$$

di $\mathrm{Ker}\,\mathcal{L}$ e riordinando.

Consideriamo la base

$$\mathcal{B}_W = \{\mathcal{L}(v_1), \dots, \mathcal{L}(v_r), w_{r+1}, \dots, w_m\}$$

ottenuta estendendo la base

$\mathcal{B}_{\mathrm{Im}\,\mathcal{L}} = \{\mathcal{L}(v_1), \dots, \mathcal{L}(v_r)\}$ di $\mathrm{Im}\,\mathcal{L}$.

Allora

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{L} & \\ v_1 & \longmapsto & \mathcal{L}(v_1) \\ v_2 & \longmapsto & \mathcal{L}(v_2) \\ \vdots & & \vdots \\ v_r & \longmapsto & \mathcal{L}(v_r) \\ v_{r+1} & & w_{r+1} \\ \vdots & & \vdots \\ v_n & & \\ & & w_m \end{array}$$

e quindi

$$F_{\mathcal{B}_W}(\mathcal{L}(v_1)) = e_1, \dots, F_{\mathcal{B}_W}(\mathcal{L}(v_r)) = e_r$$

$$F_{\mathcal{B}_W}(\mathcal{L}(v_{r+1})) = 0_{\mathbb{K}^m}, \dots, F_{\mathcal{B}_W}(\mathcal{L}(v_n)) = 0_{\mathbb{K}^m}$$

e otteniamo che la matrice che rappresenta $\mathcal{L}$ nelle basi $\mathcal{B}_V$ e $\mathcal{B}_W$ così costruite è

$$\left(e_1 \mid \dots \mid e_r \mid 0_{\mathbb{K}^m} \mid \dots \mid 0_{\mathbb{K}^m} \right) = \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{1}_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right).$$

$\boxtimes$

Teorema di classificazione delle f.ni lineari

Siano $\mathcal{L}_1 : V_1 \to W_1$ e $\mathcal{L}_2 : V_2 \to W_2$.
Allora

$$\mathcal{L}_1 \sim \mathcal{L}_2$$

$$\Updownarrow$$

$$\dim V_1 = \dim V_2,\ \dim W_1 = \dim W_2 \text{ e}$$
$$rg(\mathcal{L}_1) = rg(\mathcal{L}_2)$$

Quindi il rango è l'unico invariante per similitudine (una volta fissata la dimensione del dominio e del codominio).

dim: Se $\mathcal{L}_1 \sim \mathcal{L}_2$ esiste un diagramma commutativo

$$\begin{tikzcd} V_1 \arrow[r, "\mathcal{L}_1"] \arrow[d, "F_1"', "\simeq"] & W_1 \arrow[d, "\simeq"', "F_2"] \\ V_2 \arrow[r, "\mathcal{L}_2"'] & W_2 \end{tikzcd}$$

e quindi $F_2(\operatorname{Im} \mathcal{L}_1) = \operatorname{Im} \mathcal{L}_2$, $V_1 \simeq V_2$, $W_1 \simeq W_2$. Ne segue che $\dim V_1 = \dim V_2$, $\dim W_1 = \dim W_2$,

$$rg(\mathcal{L}_1) = rg(\mathcal{L}_2).$$

Viceversa, supponiamo che $\mathcal{L}_1 : V_1 \to W_1$, $\mathcal{L}_2 : V_2 \to W_2$ sono f.ni lineari t.c.

$$\dim V_1 = \dim V_2 = n,$$

$$\dim W_1 = \dim W_2 = m$$

$$rg(\mathcal{L}_1) = rg(\mathcal{L}_2).$$

Per la proposizione precedente esistono basi $\mathcal{B}_{V_1}, \mathcal{B}_{V_2}, \mathcal{B}_{W_1}, \mathcal{B}_{W_2}$ e due diagrammi commutativi

$$
\begin{tikzcd}
V_1 \arrow[r, "\mathcal{L}_1"] \arrow[d, "F_{\mathcal{B}_{V_1}}"'] & W_1 \arrow[d, "F_{\mathcal{B}_{W_1}}"] \\
\mathbb{K}^n \arrow[r, "A"] & \mathbb{K}^m
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
V_2 \arrow[r, "\mathcal{L}_2"] \arrow[d, "F_{\mathcal{B}_{V_2}}"] & W_2 \arrow[d, "F_{\mathcal{B}_{W_2}}"] \\
\mathbb{K}^n \arrow[r, "A"] & \mathbb{K}^m
\end{tikzcd}
$$

dove

$$A = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Allora:

$$
\begin{tikzcd}
V_1 \arrow[r, "\mathcal{L}_1"] \arrow[d, "F_{\mathcal{B}_{V_1}}"'] & W_1 \arrow[d, "F_{\mathcal{B}_{W_1}}"] \\
\mathbb{K}^n \arrow[r, "A"] & \mathbb{K}^m \\
V_2 \arrow[r, "\mathcal{L}_2"] \arrow[u, "F_{\mathcal{B}_{V_2}}"] & W_2 \arrow[u, "F_{\mathcal{B}_{W_2}}"']
\end{tikzcd}
$$

basta porre $F_1 = F^{-1}_{\mathcal{B}_{V_2}} \circ F_{\mathcal{B}_{V_1}}$ e $F_2 = F^{-1}_{\mathcal{B}_{W_2}} \circ F_{\mathcal{B}_{W_1}}$ per ottenere $\mathcal{L}_1 \sim \mathcal{L}_2$. $\boxtimes$

Matrice associata alla composizione di funzioni lineari: Il prodotto righe per colonne

Consideriamo due f.ni lineari componibili

$$V_1 \xrightarrow{L_2} V_2 \xrightarrow{L_1} V_3$$

e le matrici associate rispetto a tre basi date

$$\begin{tikzcd}
V_1 \arrow[r, "L_2"] \arrow[d, "F_{B_1}"'] & V_2 \arrow[r, "L_1"] \arrow[d, "F_{B_2}"] & V_3 \arrow[d, "F_{B_3}"] \\
\mathbb{K}^n \arrow[r, "S_B"] & \mathbb{K}^m \arrow[r, "S_A"] & \mathbb{K}^e
\end{tikzcd}$$

Vogliamo determinare la matrice associata alla f.ne composta $L_1 \circ L_2$ nelle basi B_1 (in partenza) e B_3 (in arrivo).

Sia essa C

$$\begin{tikzcd}
V_1 \arrow[r, "L_2"] \arrow[d, "F_{B_1}"'] \arrow[rr, bend left, "L_1 \circ L_2"] & V_2 \arrow[r, "L_1"] \arrow[d, "F_{B_2}"] & V_3 \arrow[d, "F_{B_3}"] \\
\mathbb{K}^n \arrow[r, "S_B"] \arrow[rr, bend right, "S_C"'] & \mathbb{K}^m \arrow[r, "S_A"] & \mathbb{K}^e
\end{tikzcd}$$

Es: 1) $A = (a, b)$, $B = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$\Rightarrow AB = ax + by$

2) $A = (a, b)$ $\quad B = \begin{pmatrix} x & z \\ y & w \end{pmatrix}$

$\Rightarrow AB = (ax + by, az + bw)$

3) $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ $\quad B = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$\Rightarrow AB = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix}$

4) $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ $\quad B = \begin{pmatrix} x & z \\ y & w \end{pmatrix}$

$\Rightarrow AB = \begin{pmatrix} ax + by & az + bw \\ cx + dy & cz + dw \end{pmatrix}$

OSS: Per poter moltiplicare A e B, S_A ed S_B devono essere componibili. Quindi

AB è definita $\Leftrightarrow$ # colonne di A = # righe di B

$$\underset{\ell \times \cancel{m}}{A} \; \underset{\cancel{m} \times n}{B} \;=\; C \quad \rightsquigarrow \; \ell \times n$$

<u>Oss</u>:

$$(AB)^j = AB^j$$

$$(AB)^j_i = (AB^j)_i = \underbrace{A_i B^j}_{} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik} b_{kj}$$

i-esima riga di A per j-esima colonna di B.

per questo il prodotto AB
si chiama <u>righe per colonne</u>.

In MATLAB il comando per calcolare
AB è `A*B`.

<u>Es</u>: ·) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

·) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 3 \\ 5 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

Quindi $AB \neq BA$ in generale.

<u>OSS</u>: il prodotto di una riga per una colonna è un numero

$$(a, b)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = ax + by$$

che possiamo pensare come una somma pesata (si pensi alla media dei voti...)

Il prodotto di una colonna per una riga è una matrice

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}(a\ b) = \begin{pmatrix} xa & xb \\ ya & yb \end{pmatrix}$$

Matrici inverse

Sia $B \in Mat_{n\times n}(\mathbb{K})$ una matrice invertibile e sia B^{-1} la sua inversa. Allora

$$S_B \circ S_B^{-1} = Id_{\mathbb{K}^n} = S_B^{-1} \circ S_B$$

e quindi, per definizione,

$$S_B \circ S_{B^{-1}} = S_{\mathbb{1}_n} = S_{B^{-1}} \circ S_B .$$

Ne segue che B^{-1} è l'unica matrice t.c.

$$BB^{-1} = \mathbb{1}_n = B^{-1}B. \qquad (*)$$

D'altronde, per via delle caratterizzazioni degli isomorfismi lineari, è sufficiente una sola delle due proprietà di B^{-1} in $(*)$: B^{-1} è l'unica matrice t.c. $BB^{-1} = \mathbb{1}_n$.

Esempio: Consideriamo le f.ni lineari

$$\mathbb{R}^3 \xrightarrow{L_1} \mathbb{R}^2 \qquad \mathbb{R}^2 \xrightarrow{L_2} \mathbb{R}^2$$

$$\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}$$

Calcolare la matrice M che rappresenta $L_2 \circ L_1$ nelle basi standard di $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^2$.

Sol.: Le due f.ni lineari sono definite nelle due basi

$$\mathcal{B}_1 = \left\{ v_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \right\}$$

e

$$\mathcal{B}_2 = \left\{ w_1 = \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}, w_2 = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \right\}$$

Abbiamo quindi il seguente diagramma

$$\begin{tikzcd}[column sep=large]
\mathbb{R}^3 \arrow[r, equal] \arrow[d, "F_{e_3}"'] & \mathbb{R}^3 \arrow[r, "L_1"] \arrow[d, "F_{\mathcal{B}_1}"] & \mathbb{R}^2 \arrow[r, equal] \arrow[d, "F_{e_2}"] & \mathbb{R}^2 \arrow[r, "L_2"] \arrow[d, "F_{\mathcal{B}_2}"] & \mathbb{R}^2 \arrow[d, "F_{e_2}"] \\
\mathbb{R}^3 & \mathbb{R}^3 \arrow[l, "{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = B_1}"] \arrow[r, "{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = A}"'] & \mathbb{R}^2 & \mathbb{R}^2 \arrow[l, "{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = B_2}"] \arrow[r, "{\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = C}"'] & \mathbb{R}^2
\end{tikzcd}$$

La matrice cercata é quindi

$$M = C B_2^{-1} A B_1^{-1}.$$

Per determinarla dobbiamo prima calcolare le due inverse

$$B_1^{-1} \text{ e } B_2^{-1}:$$

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$S_{B_1}: \quad e_1 \longmapsto B_1^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$e_2 \longmapsto B_1^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$e_3 \longmapsto B_1^3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Quindi

$$S_{B_1}^{-1}: \quad B_1^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \longmapsto e_1$$

$$B_1^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \longmapsto e_2$$

$$B_1^3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \longmapsto e_3$$

Si ha

$$e_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$e_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$e_3 = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Quindi

$$B_1^{-1} = \left(S_{B_1}^{-1}(e_1) \middle| S_{B_1}^{-1}(e_2) \middle| S_{B_1}^{-1}(e_3) \right) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$e_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$e_2 = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Quindi

$$B_2^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

La matrice M è quindi

$$M = C B_2^{-1} A B_1^{-1}.$$

$$= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

MATLAB

Per trovare la matrice di cambiamento di base tra due basi $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$ di $V=\mathbb{K}^n$ o $V=\mathbb{K}[x]_{\leq n-1}$ conviene spezzare il diagramma:

$$
\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "="] \arrow[d, "F_{\mathcal{B}_1}"'] & V \arrow[d, "F_{e_n}"] & V \arrow[l, "="'] \arrow[d, "F_{\mathcal{B}_2}"] \\
\mathbb{K}^n \arrow[r, "B_1"'] & \mathbb{K}^n & \mathbb{K}^n \arrow[l, "B_2"]
\end{tikzcd}
$$

La matrice di cambiamento di base è $B = B_2^{-1} B_1$

Per Trovarla:

$$[B_2 \mid B_1] \rightsquigarrow [\mathbb{1}_n \mid B]$$

<u>Es</u>: $\mathcal{B}_1 = \left\{ \overset{v_1 =}{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}}, \overset{v_2 =}{\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}} \right\}$, $\mathcal{B}_2 = \left\{ \overset{w_1 =}{\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}}, \overset{w_2 =}{\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}} \right\}$

sono basi di $\mathbb{R}^2$. Per Trovare

la matrice di cambiamento di base A

da $\mathcal{B}_2$ a $\mathcal{B}_1$

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^2 \arrow[r, equal] \arrow[d, "F_{\mathcal{B}_1}"'] & \mathbb{R}^2 \arrow[d, "F_{\mathcal{B}_2}"] \\
\mathbb{R}^2 \arrow[r, "A"] & \mathbb{R}^2
\end{tikzcd}$$

"spezziamo il diagramma:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^2 \arrow[r, equal] \arrow[d, "F_{\mathcal{B}_1}"'] & \mathbb{R}^2 \arrow[r, equal] \arrow[d, "F_{e_2}"] & \mathbb{R}^2 \arrow[d, "F_{\mathcal{B}_2}"] \\
\mathbb{R}^2 \arrow[r, "B_1"'] & \mathbb{R}^2 & \mathbb{R}^2 \arrow[l, "B_2"]
\end{tikzcd}$$

dove $B_1 = \begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 2\end{pmatrix}$ e $B_2 = \begin{pmatrix}3 & 2\\1 & 1\end{pmatrix}$.

$$\Rightarrow A = B_2^{-1} B_1 = \begin{pmatrix}1 & -2\\-1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1 & -3\\2 & 5\end{pmatrix}$$

Quindi $A = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$. Verifichiamo

$$-w_1 + 2w_2 = -\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = v_1 \quad \checkmark$$

$$-3w_1 + 5w_2 = -3\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + 5\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = v_2 \quad \checkmark$$

$\blacksquare$

Es: $\mathcal{B}_1 = \{1+x, 1+x^2, x+x^2\} \subset \mathbb{R}[x]_{\leq 2} = V$

$\mathcal{B}_2 = \{1-x, 2+x, 1+x+x^2\} \subset \mathbb{R}[x]_{\leq 2} = V$

Verifichiamo che $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$ sono basi di $\mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ e troviamo la matrice di cambiamento di base da $\mathcal{B}_2$ a $\mathcal{B}_1$ e da $\mathcal{B}_1$ a $\mathcal{B}_2$:

Consideriamo la base standard

$\mathcal{E}_2 = \{1, x, x^2\}$ di $\mathbb{R}[x]_{\leq 2} = V$

Allora

$$F_{e_2}(\mathcal{B}_1) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$F_{e_2}(\mathcal{B}_2) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Poiché $F_{e_2} : \mathbb{R}[X]_{\leq 2} \to \mathbb{R}^3$ è un isomorfismo lineare $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$ sono lin. Ind. $\Leftrightarrow$ $F_{e_2}(\mathcal{B}_1)$ e $F_{e_2}(\mathcal{B}_2)$ sono lin. Ind.. Verifichiamo quindi che $F_{e_2}(\mathcal{B}_1)$ e $F_{e_2}(\mathcal{B}_2)$ sono lin. Ind. calcolando il determinante delle matrici che hanno i loro elementi come colonne:

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = -2 \neq 0$$

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3 \neq 0$$

$\Rightarrow$ $F_{e_2}(\mathcal{B}_1)$ e $F_{e_2}(\mathcal{B}_1)$ sono lin. Ind.

$\Rightarrow$ $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$ sono lin. Ind.

Poiché $|\mathcal{B}_1| = |\mathcal{B}_2| = 3 = \dim \mathbb{R}[X]_{\leq 2}$, ne segue che $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$ sono basi. Cerchiamo le matrici di cambiamento di base:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "Id_V"] \arrow[d, "F_{\mathcal{B}_1}"'] & V \arrow[d, "F_{\mathcal{B}_2}"] \\ \mathbb{R}^3 \arrow[r, "A"'] & \mathbb{R}^3 \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} V \arrow[r, "Id_V"] \arrow[d, "F_{\mathcal{B}_2}"'] & V \arrow[d, "F_{\mathcal{B}_1}"] \\ \mathbb{R}^3 \arrow[r, "C"'] & \mathbb{R}^3 \end{tikzcd}$$

<u>OSS</u> (generale): Una matrice di cambiamento di base A

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "Id_V"] \arrow[d, "F_{\mathcal{B}_1}"'] & V \arrow[d, "F_{\mathcal{B}_2}"] \\ \mathbb{K}^n \arrow[r, "A"'] & \mathbb{K}^n \end{tikzcd}$$

è invertibile (poiché Id_V è invertibile).

$C = A^{-1}$.

Cerchiamo A:

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "\equiv"] \arrow[d, "F_{B_1}"'] & V \arrow[r, "\equiv"] \arrow[d, "F_{e_3}"] & V \arrow[d, "F_{B_2}"] \\
\mathbb{K}^3 \arrow[r, "B_1"'] & \mathbb{K}^3 & \mathbb{K}^3 \arrow[l, "B_2"]
\end{tikzcd}$$

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = B_2^{-1} B_1 : [B_2 | B_1] = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2/3 & 2/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2/3 & -1/3 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1/3 & 2/3 & -1/3 \\ 0 & 1 & 0 & 2/3 & -1/3 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} -1/3 & 2/3 & -1/3 \\ 2/3 & -1/3 & -1/3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}. \text{ Verifichiamo:}$$

·) $-\frac{1}{3}(1-x) + \frac{2}{3}(2+x) = 1 + x$ ✓

·) $\frac{2}{3}(1-x) - \frac{1}{3}(2+x) + (1+x+x^2) = 1+x^2$ ✓

·) $-\frac{1}{3}(1-x) - \frac{1}{3}(2+x) + (1+x+x^2) = x+x^2$ ✓

Per Trovare C dobbiamo invertire A:

Usiamo Cramer:

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\det A = \det\left(B_2^{-1} B_1\right) = \det(B_2)^{-1} \det B_1 = \frac{1}{3}(-2) = -\frac{2}{3}$$

$$C_{11} = \frac{1}{9}\det\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} = 0 \qquad C_{21} = \frac{1}{9}\det\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} = 1$$

$$C_{12} = -\frac{1}{9}\det\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = -\frac{2}{3} \qquad C_{22} = \frac{1}{9}(-3) = -\frac{1}{3}$$

$$C_{13} = \frac{1}{9}\det\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \frac{2}{3} \qquad C_{23} = -\frac{1}{9}(-3) = \frac{1}{3}$$

$$C_{31} = \frac{1}{9}(-3) = -\frac{1}{3} \qquad C_{32} = -\frac{1}{9}(3) = -\frac{1}{3} \qquad C_{33} = \frac{1}{9}(-3) = -\frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow C = -\frac{3}{2}\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1/3 \\ -2/3 & -1/3 & -1/3 \\ 2/3 & 1/3 & -1/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3/2 & 1/2 \\ 1 & 1/2 & 1/2 \\ -1 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$ Verifichiamo:

·) $(1+x^2) - (x+x^2) = 1 - x$ ✓

·) $\frac{1}{2}\left[3(1+x) + (1+x^2) - (x+x^2)\right] = 2 + x$ ✓

·) $\frac{1}{2}\left[(1+x) + (1+x^2) + (x+x^2)\right] = 1 + x + x^2$ ✓

Es:

$$\mathcal{B}_1 = \left\{ v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathbb{R}^4$$

$$\mathcal{B}_2 = \left\{ w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, w_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, w_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathbb{R}^3$$

$\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$ sono basi (Esercizio!).

Consideriamo la funzioni lineare

$g: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ data da

$$g(v_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, g(v_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, g(v_3) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, g(v_4) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

e la funzione lineare $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ t.c.

$$f(w_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, f(w_2) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, f(w_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Scrivere la matrice che rappresenta $f \circ g: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ nella base $\mathcal{B}_1$ (sia in partenza che in arrivo):

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^4 \arrow[r, "g"] \arrow[d, "F_{\mathcal{B}_1}"'] & \mathbb{R}^3 \arrow[r, equal] \arrow[d, "F_{e_3}"] & \mathbb{R}^3 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "F_{\mathcal{B}_2}"'] & \mathbb{R}^4 \arrow[r, equal] \arrow[d, "F_{e_4}"] & \mathbb{R}^4 \arrow[d, "F_{\mathcal{B}_1}"] \\
\mathbb{R}^4 \arrow[r, "A"'] & \mathbb{R}^3 & \mathbb{R}^3 \arrow[l, "B_2"] \arrow[r, "C"'] & \mathbb{R}^4 & \mathbb{R}^4 \arrow[l, "B_1"]
\end{tikzcd}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

La matrice cercata è $B_1^{-1} C B_2^{-1} A = L$

$$(B_1 | C) \rightsquigarrow \left(\mathbb{1}_4 \,\middle|\, \begin{matrix} -5 & 0 & -6 \\ -5 & 1 & -5 \\ -6 & 1 & -3 \\ 3 & 1 & 3 \end{matrix} \right)$$

$$(B_2 | A) \rightsquigarrow \left(\mathbb{1}_3 \,\middle|\, \begin{matrix} 3 & -2 & 1 & 1 \\ -4 & 5 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 0 & 0 \end{matrix} \right)$$

$$L = \begin{pmatrix} -5 & 0 & -6 \\ -5 & 1 & -5 \\ -6 & 1 & -3 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 & 1 \\ -4 & 5 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -27 & 22 & -5 & -5 \\ -29 & 25 & -5 & -6 \\ -28 & 23 & -6 & -7 \\ 11 & -7 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$\blacksquare$

Es: (Proiettori).

Sia V uno spazio vettoriale e e siano U e $W \subset V$ sottospazi vettoriali tali che $V = U \oplus W$. Quindi ogni $v \in V$ si scrive in maniera unica come $v = u + w$ per qualche $u \in U, w \in W$.

La proiezione su U lungo W è la funzione

$$pr_U^W : V \to V$$

data da

$$pr_U^W(u+w) = u.$$

Quindi $\operatorname{Ker} pr_U^W = W$, $\operatorname{Im} pr_U^W = U$.

Se scegliamo una base $\mathcal{B}_U$ di U ed una base $\mathcal{B}_W$ di W, allora la matrice che rappresenta pr_U^W nella base $\mathcal{B} = \mathcal{B}_U \cup \mathcal{B}_W$ è $\left(\begin{array}{c|c} \mathbb{1}_k & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$.

($k = \dim U$).

Es: Trovare la matrice che rappresenta la funzione lineare

$$\mathcal{L}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \quad t.c. \quad \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}, \ \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

nella base standard.

Sol.: $\mathcal{B} = \left\{\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\right\}$ è una base.

Il testo ci fornisce le due matrici A, B:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^2 \arrow[d, "F_e"'] \arrow[r, equal] & \mathbb{R}^2 \arrow[r, "\mathcal{L}"] \arrow[d, "F_{\mathcal{B}}"] & \mathbb{R}^2 \arrow[d, "F_e"] \\
\mathbb{R}^2 & \mathbb{R}^2 \arrow[l, "B"] \arrow[r, "A"'] & \mathbb{R}^2
\end{tikzcd}$$

date da $B = \begin{pmatrix}1 & 2\\2 & 1\end{pmatrix}$ e $A = \begin{pmatrix}3 & 1\\4 & 1\end{pmatrix}$.

La matrice cercata è quindi

$$AB^{-1} = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix}3 & 1\\4 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -2\\-2 & 1\end{pmatrix} = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & -5\\2 & -7\end{pmatrix}$$

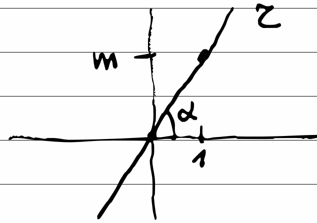
Verifichiamo:

$$\mathcal{L}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} \overset{?}{=} -\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + 2\left(-\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-5\\-7\end{pmatrix}\right) = \frac{1}{3}\left[\begin{pmatrix}-1\\-2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}10\\14\end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix} \checkmark$$

$$\mathcal{L}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} \overset{?}{=} 2\left[-\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right] + \left[-\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-5\\-7\end{pmatrix}\right] = \frac{1}{3}\left[\begin{pmatrix}-2\\-4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}5\\7\end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \checkmark$$

Proiettore ortogonale su una retta

Sia $r: y = mx$ una retta di $\mathbb{R}^2$ per l'origine



$tg\,\alpha = m.$

La proiezione ortogonale su r è la funzione

$$pr_r : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

che associa ad ogni $w \in \mathbb{R}^2$ la sua proiezione ortogonale su un generatore di r, ad esempio $v = \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$. Quindi:

$$pr_r : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$w \longmapsto pr_v(w) = \frac{w \cdot v}{v \cdot v} v$$

OSS (importante): pr_r non dipende dal generatore di r scelto: se $v' = \lambda v$ è un altro generatore di r:

$$pr_{v'}(w) = \frac{w \cdot (\lambda v)}{(\lambda v) \cdot (\lambda v)} (\lambda v) = \frac{w \cdot v}{v \cdot v} v = pr_r(w).$$

Teorema: pr_r è lineare e la matrice che la rappresenta nella base standard è

$$P_m = \frac{1}{1+m^2}\begin{pmatrix} 1 & m \\ m & m^2 \end{pmatrix}$$

dim:

$$pr_r(\alpha w_1 + \beta w_2) = \frac{(\alpha w_1 + \beta w_2)\cdot v}{v \cdot v}\, v =$$

$$= \alpha\,\frac{w_1 \cdot v}{v\cdot v}\, v + \beta\,\frac{w_2\cdot v}{v \cdot v}\, v$$

$$= \alpha\, pr_r(w_1) + \beta\, pr_r(w_2)$$

$$pr_r(e_1) = \frac{e_1 \cdot \binom{1}{m}}{1+m^2}\begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix} = \frac{1}{1+m^2}\begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$$

$$pr_r(e_2) = \frac{e_2 \cdot \binom{1}{m}}{1+m^2}\begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix} = \frac{m}{1+m^2}\begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$$

Es:

Calcolare la distanza del punto $Q = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ dalla retta $r: 2x+3y=1$.

Sol.: $r = X_0 + r_0$ dove $X_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ e $r_0: 2x+3y=0$.

$$\mathrm{dist}(Q,r) = \mathrm{dist}(Q - X_0, r_0) =$$
$$= \mathrm{dist}(Q-X_0, pr_{r_0}(Q-X_0))$$

Calcoliamo la matrice di proiezione ortogonale su r_0: r_0 ha pendenza $-\frac{2}{3}$, quindi la matrice é

$$P_{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{1+\frac{4}{9}} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{4}{9} \end{pmatrix}$$

Per cui:

$$pr_{r_0}(Q-X_0) = \frac{9}{13} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{4}{9} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{9}{13} \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Quindi

$$\mathrm{dist}(Q,r) = \left\| \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} - \frac{9}{13} \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \frac{1}{13} \begin{pmatrix} 14 \\ 21 \end{pmatrix} \right\| = \frac{7}{3}\sqrt{13}$$

Matrici simili

Due matrici $A, C \in Mat_{n\times n}(\mathbb{K})$ si dicono <u>simili</u> (o associate) se $\exists\ B \in Mat_{n\times n}(\mathbb{K})$ invertibile t.c.

$$C = B^{-1}AB.$$

"Essere associate" è una relazione di equivalenza che si denota con $\sim$.

Denotiamo con

$$[A]_\sim = \{C \mid \exists B : C = B^{-1}AB\} = \{C \sim A\}$$

Se $\mathcal{L} : V \to V$ è un endomorfismo lineare, $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base di V e A la matrice che rappresenta $\mathcal{L}$ in $\mathcal{B}$ allora $[A]_\sim$ sono tutte e sole le matrici che rappresentano $\mathcal{L}$.

$$V$$
$$\downarrow$$

Infatti, sia C una matrice che rappresenta $\mathcal{L}$ in una base $\mathcal{B}'$.

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, equal] \arrow[d, "F_{\mathcal{B}'}"'] & V \arrow[r, "\mathcal{L}"] \arrow[d, "F_{\mathcal{B}}"] & V \arrow[r, equal] \arrow[d, "F_{\mathcal{B}}"] & V \arrow[d, "F_{\mathcal{B}'}"] \\
\mathbb{K}^n \arrow[r, "B"'] & \mathbb{K}^n \arrow[r, "A"'] & \mathbb{K}^n & \mathbb{K}^n \arrow[l, "B"]
\end{tikzcd}$$

allora

$$C = B^{-1}AB$$

dove B è la matrice di cambiamento di base da $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$.

Il determinante di un'applicazione lineare

Sia $\mathcal{L}: V \to V$ un endomorfismo lineare e siano A e C due matrici che rappresentano $\mathcal{L}$. Allora

$$C = B^{-1}AB$$

per qualche B invertibile.

Per il teorema di Binet si ha

$$\det(C) = \det(A).$$

Quindi tutte le matrici che rappresentano $\mathcal{L}$ hanno lo stesso determinante.

Questo numero si chiama il determinante di $\mathcal{L}$:

$$\det(\mathcal{L}) := \det(A).$$