Rango riga

Data una matrice $A \in Mat_{m\times n}(\mathbb{K})$ le colonne di A sono elementi di $\mathbb{K}^m$ e le righe di A sono elementi di $Mat_{1\times n}(\mathbb{K})$.
Abbiamo visto che $col(A) = Im A$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{K}^m$.
Occupiamoci adesso delle righe di A.

Def: Lo spazio delle righe di A è

$$Row(A) = \langle A_1, \dots, A_m \rangle \subseteq Mat_{1\times n}(\mathbb{K}).$$

Le righe di A "sono" le colonne di A^t nel seguente senso: consideriamo

$$\mathcal{L} = {}^\wedge t : \mathbb{K}^n \longrightarrow Mat_{1\times n}(\mathbb{K})$$
$$X \longmapsto X^t$$

$\mathcal{L}$ è lineare, iniettivo e suriettivo (esercizio!)
Quindi $\mathcal{L}$ è un isomorfismo lineare.

Se restringiamo $\mathcal{L} = {}^t$ a $\text{Col}(A^t)$ otteniamo un isomorfismo lineare

$$\mathcal{L} : \text{Col}(A^t) \xrightarrow{\sim} \text{Row}(A).$$

Quindi

$$\dim \text{Row}(A) = \text{rg}\, A^t.$$

<u>Def</u>: Il <u>rango-riga</u> di A è la dimensione di $\text{Row}(A)$ e si denota con $\text{Rrg}(A)$.

Quindi

$$\text{Rrg}(A) = \text{rg}\, A^t.$$

<u>Es</u>:

·) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Rrg}\, A = 2$ perché le due righe sono lin. Ind.

·) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Rrg}\, A = 2$ perché le due righe sono lin. Ind.

·) Determinare il rango-riga di

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Sol:

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} = S$$

Quindi, $\mathrm{Rrg}\, A = \mathrm{rg}\, A^t = \mathrm{rg}\, S = 3.$ ∎

·) Determinare il rango-riga di

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -5 & 6 & -1 & 2 \\ -4 & 8 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

Sol.:

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & -5 & -4 \\ 2 & 6 & 8 \\ 3 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & 6 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -5 & -4 \\ 0 & 16 & 16 \\ 0 & 14 & 14 \\ 0 & 22 & 22 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -5 & -4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = S$$

$\mathrm{Rrg}\, A = \mathrm{rg}\, A^t = \mathrm{rg}\, S = 2.$ ∎

Osserviamo che

$$\boxed{A \underset{R}{\sim} B \implies \mathrm{Row}(A) = \mathrm{Row}(B).}$$

Infatti, le operazioni elementari sulle righe sono invertibili.

Più precisamente:

$A \xrightarrow[R_i \leftrightarrow R_j]{\sim} B$ allora $\mathrm{Row}(A) = \mathrm{Row}(B)$

$A \xrightarrow[R_i \mapsto \lambda R_i]{\sim} B$ per $\lambda \neq 0$ allora

$\mathrm{Row}(B) = \langle A_1, .., \lambda A_i, .., A_m \rangle = \langle A_1, .., A_i, ..., A_m \rangle$

$A \xrightarrow[R_i \mapsto R_i + cR_j]{\sim} B$ allora

$$\mathrm{Row}(B) = \langle A_1, .., A_{i-1}, A_i + cA_j, ..., A_j, .., A_m \rangle =$$
$$= \langle A_1, ..., A_{i-1}, A_i, ..., A_j, .., A_m \rangle = \mathrm{Row}(A).$$

Es:

$\mathrm{Row}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} =$

Teorema: Sia $A \in Mat_{m \times n}(\mathbb{K})$.

Allora $Rrg(A) = rg\, A^t = rg\, A$.

Dim: Dimostriamo prima

il Teorema per una matrice S a scala.

Infatti, se $S_1, \dots, S_r$ sono le righe

non nulle di S con pivot $p_1, \dots, p_r$

nelle colonne $1 \leq j(1) < j(2) < \dots < j(r) \leq m$

rispettivamente, allora

$$S_i = p_i e_{j(i)}^t + \sum_{k > j(i)} S_i^k e_k^t \qquad \forall i = 1, \dots, r.$$

Allora $S_i \notin \langle S_1, \dots, S_{i-1} \rangle$ $\forall i \geq 2$ e

quindi $S_1, \dots, S_r$ sono lin. Ind.

Ne segue che $Rrg\, S = r = rg\, S$.

Se $A \underset{R}{\sim} S$ con S a scala, allora

$$Rrg\, A = Rrg\, S = rg\, S = rg\, A. \quad \boxtimes$$

Vediamo adesso un Teorema molto sorprendente.

Per formularlo, ricordiamo che

<u>Def</u>: Uno spazio vettoriale V è <u>somma diretta</u> di due suoi sottospazi vettoriali $U, W \subseteq V$ se

1) $V = U + W$

2) $U \cap W = \{0_V\}$.

In questo caso scriviamo

$$V = U \oplus W.$$

Abbiamo visto:

<u>Es</u>: ·) $Mat_{n \times n}(\mathbb{K}) = Sym(n) \oplus ASym(n)$.

·) $\mathbb{K}^n = \mathbb{K}e_1 \oplus \mathbb{K}e_2 \oplus \ldots \oplus \mathbb{K}e_n$

Teorema (di decomposizione reale)

Sia $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$ o $\mathbb{R}$.

Data una matrice $A \in Mat_{m \times n}(\mathbb{K})$ si ha

$$\mathbb{K}^n = \operatorname{Ker} A \oplus \operatorname{Im} A^t$$

In particolare,

$$rg\, A = rg\, A^t = Rrg(A).$$

dim: Sia $X \in \operatorname{Ker} A \cap \operatorname{Im} A^t \subseteq \mathbb{K}^n$.

Allora $\exists\, Y \in \mathbb{K}^m$ t.c. $X = A^t Y$.

Calcoliamo

$$X^t X = X^t (A^t Y) = (X^t A^t) Y = (AX)^t Y = 0_{\mathbb{K}^m}^t Y = 0$$

Quindi, se $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ otteniamo

$$0 = X^t X = (x_1, \dots, x_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2$$

$$\Rightarrow x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0 \Rightarrow X = 0_{\mathbb{K}^n}.$$

Abbiamo quindi dimostrato che

$$\boxed{\operatorname{Ker} A^t \cap \operatorname{Im} A = \{0_{\mathbb{K}^n}\}} \quad (*)$$

Lo stesso ragionamento fatto per A^t invece di A dimostra che

$$\boxed{\operatorname{Ker} A^t \cap \operatorname{Im} A = \{0_{\mathbb{K}^m}\}.} \quad (**)$$

Quindi, da (*),

Grassmann

$$\dim(\operatorname{Ker} A + \operatorname{Im} A^t) = \dim \operatorname{Ker} A + \operatorname{rg} A^t$$

$$= n - \operatorname{rg} A + \operatorname{rg} A^t$$

Formula delle dimensioni

Dato che $\operatorname{Ker} A + \operatorname{Im} A^t \subseteq \mathbb{K}^n$ otteniamo

$$n - \operatorname{rg} A + \operatorname{rg} A^t \leq n \implies \boxed{\operatorname{rg} A^t \leq \operatorname{rg} A.} \quad (\Delta)$$

Similmente, da (**), otteniamo

$$\dim(\operatorname{Ker} A^t + \operatorname{Im} A) = \dim \operatorname{Ker} A^t + \operatorname{rg} A$$

$$= m - \operatorname{rg} A^t + \operatorname{rg} A \leq m$$

$$\implies \boxed{\operatorname{rg} A \leq \operatorname{rg} A^t} \quad (\Delta\Delta)$$

Mettendo insieme (Δ) e $(\Delta\Delta)$, otteniamo

$$\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} A^t$$

e che $\dim(\operatorname{Ker} A + \operatorname{Im} A^t) = n$. ∎

Es: Consideriamo la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

Trovare una base di Ker A ed estenderla ad una base di $\mathbb{R}^4$

Sol.:

$$\operatorname{Ker} A = \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -4 & -8 & -12 \end{pmatrix} = \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 6 \\ 3 & 7 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & -4 \\ 0 & -8 \\ 0 & -12 \end{pmatrix}$$

Una base di Ker A è $\mathcal{B}_{\operatorname{Ker} A} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

Una base di $\operatorname{Im} A^t$ è $\mathcal{B}_{\operatorname{Im} A^t} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix} \right\}$

Una base di $\mathbb{R}^4$ è, per il Teorema di decomposizione

$$\mathcal{B} = \mathcal{B}_{\operatorname{Ker} A} \cup \mathcal{B}_{\operatorname{Im} A^t}$$

ed ha la proprietà richiesta. ∎

Il Teorema di decomposizione così formulato non è vero se $\mathbb{K}=\mathbb{C}$.
Ad esempio:

$$A=\begin{pmatrix}1 & i\\ i & -1\end{pmatrix}\in Mat_{2\times 2}(\mathbb{C})$$

allora $A=A^t$ e

$$\operatorname{Ker} A=\operatorname{Ker}\begin{pmatrix}1 & i\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\left\langle\begin{pmatrix}-i\\ 1\end{pmatrix}\right\rangle=\left\langle\begin{pmatrix}1\\ i\end{pmatrix}\right\rangle$$

$$\operatorname{Im} A^t=\operatorname{Im} A=\left\langle\begin{pmatrix}1\\ i\end{pmatrix}\right\rangle=\operatorname{Ker} A$$

Quindi

$$\operatorname{Ker} A\cap \operatorname{Im} A\neq\{0_{\mathbb{C}^2}\}.$$

Osserviamo però che se consideriamo

$$\overline{A}^t=\begin{pmatrix}1 & -i\\ -i & -1\end{pmatrix}^t=\begin{pmatrix}1 & -i\\ -i & -1\end{pmatrix}$$

allora

$$\operatorname{Im}\overline{A}^t=\left\langle\begin{pmatrix}1\\ -i\end{pmatrix}\right\rangle$$

e quindi

$$\operatorname{Ker} A\cap \operatorname{Im}\overline{A}^t=\{0_{\mathbb{C}^2}\}.$$

Def: Sia $A \in Mat_{m\times n}(\mathbb{C})$.

La **coniugata** di A è la matrice $\bar{A}$ definita come

$$(\bar{A})_i^j = \overline{(A_i^j)}$$

Es:

·) $A = \begin{pmatrix} i & 1+i & 2i \\ 2 & -i & 3-i \end{pmatrix} \Rightarrow \bar{A} = \begin{pmatrix} -i & 1-i & -2i \\ 2 & i & 3+i \end{pmatrix}$

·) Se $A \in Mat_{m\times n}(\mathbb{R})$ allora $\bar{A} = A$.

Se $Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n$ allora

$$\bar{Z}^t Z = \bar{z}_1 z_1 + \bar{z}_2 z_2 + \dots + \bar{z}_n z_n$$
$$= |z_1|^2 + |z_2|^2 + \dots + |z_n|^2 \in \mathbb{R}_{\geq 0}$$

Inoltre,

$$\bar{Z}^t Z = 0 \iff Z = 0_{\mathbb{C}^n}.$$

Oss: $\overline{AB} = \bar{A}\bar{B}$ (esercizio)

OSS: $\operatorname{Ker} \bar{A} \simeq \operatorname{Ker} A$.

Infatti, se $X \in \operatorname{Ker} \bar{A}$ allora

$$\bar{A} X = 0_{\mathbb{K}^m} \Rightarrow \overline{\bar{A} X} = \bar{0}_{\mathbb{K}^m}$$

$$\Rightarrow A \bar{X} = 0_{\mathbb{K}^m} \Rightarrow \bar{X} \in \operatorname{Ker} A$$

Consideriamo

$$\mathcal{L} : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$$

$$X \mapsto \bar{X}$$

$\mathcal{L}$ è un isomorfismo lineare e

$$\mathcal{L}(\operatorname{Ker} \bar{A}) = \operatorname{Ker} A.$$

In particolare,

$$\operatorname{rg} \bar{A} = \operatorname{rg} A.$$

Formuliamo adesso il Teorema di decomposizione, formulato in modo da includere anche il caso complesso:

Teorema (di decomposizione)

Sia $\mathbb{K} = \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$. Sia $A \in Mat_{n\times n}(\mathbb{K})$.

Allora

$$\mathbb{K}^n = \operatorname{Ker} A \oplus \operatorname{Im} \bar{A}^t.$$

In particolare, $rg\, A^t = rg\, \bar{A}^t = rg\, A$.

dim:

Sia $Z \in \operatorname{Ker} A \cap \operatorname{Im} \bar{A}^t$. Allora $\exists\, Y \in \mathbb{K}^m$ t.c. $Z = \bar{A}^t Y$ e $AZ = 0_{\mathbb{K}^m}$.

Calcoliamo:

$$\bar{Z}^t Z = \overline{(\bar{A}^t Y)}^t Z = \overline{(Y^t \bar{A})}\, Z = \bar{Y}^t (AZ) = 0$$

$$\Rightarrow Z = 0_{\mathbb{K}^n} \Rightarrow \operatorname{Ker} A \cap \operatorname{Im} \bar{A}^t = \{0_{\mathbb{K}^n}\}.$$

Quindi, $\dim(\operatorname{Ker} A + \operatorname{Im} \bar{A}^t) = n - rg A + rg\, \bar{A}^t$.

Poiché $\operatorname{Ker} A + rg\, \bar{A}^t \subseteq \mathbb{K}^n$,

$$n - rg A + rg\, \bar{A}^t = \dim(\operatorname{Ker} A + rg\, \bar{A}^t) \leq n$$

$$\Rightarrow rg\, \bar{A}^t \leq rg\, A.$$

Ripetendo il ragionamento con $\bar{A}^t$ al posto di A, otteniamo $rg A = rg\, \bar{A}^t$ $\blacksquare$

Es:

$$A = \begin{pmatrix} 1+i & 3+2i & 1+i & 1 \\ i & 2i & 3i & 4i \\ 2 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \in Mat_{3\times 4}(\mathbb{C})$$

Trovare una base di Ker A ed estenderla ad una base di $\mathbb{C}^4$ con il teorema di decomposizione.

Sol.:

$$A = \begin{pmatrix} 1+i & 3+2i & 1+i & 1 \\ i & 2i & 3i & 4i \\ 2 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1-2i & 1-4i \\ i & 2i & 3i & 4i \\ 2 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1-2i & 1-4i \\ 0 & -i & -2+2i & -4+3i \\ 0 & -7 & -1+4i & 1+8i \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1-2i & 1-4i \\ 0 & 1 & -2-2i & -3-4i \\ 0 & -7 & -1+4i & 1+8i \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1-2i & 1-4i \\ 0 & 1 & -2-2i & -3-4i \\ 0 & 0 & -15-10i & -20-20i \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1-2i & 1-4i \\ 0 & 1 & -2-2i & -3-4i \\ 0 & 0 & 3+2i & 4+4i \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1-2i & 1-4i \\ 0 & 1 & -2-2i & -3-4i \\ 0 & 0 & 1 & \frac{20}{13}+\frac{4}{13}i \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1-2i & 1-4i \\ 0 & 1 & -2-2i & -3-4i \\ 0 & 0 & 1 & \frac{20}{13}+\frac{4}{13}i \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & -\frac{15}{13}-\frac{16}{13}i \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{13}-\frac{4}{13}i \\ 0 & 0 & 1 & \frac{20}{13}+\frac{4}{13}i \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{6}{13}-\frac{4}{13}i \\ 0 & 1 & 0 & \frac{17}{13}-\frac{20}{13}i \\ 0 & 0 & 1 & \frac{20}{13}+\frac{4}{13}i \end{pmatrix} = rref(A)$$

Quindi

$$\operatorname{Ker} A = \left\langle \begin{pmatrix} 6-4i \\ 17-20i \\ 20+4i \\ 13 \end{pmatrix} \right\rangle \quad e \quad \mathcal{B}_{\operatorname{Ker} A} = \left\{ \begin{pmatrix} 6-4i \\ 17-20i \\ 20+4i \\ 13 \end{pmatrix} \right\}$$

$\dim \operatorname{Ker} A = 1$

Cerchiamo una base di $\overline{A}^t$.

$$\bar{A}^t = \begin{pmatrix} 1-i & -i & 2 \\ 3-2i & -2i & -1 \\ 1-i & -3i & 1 \\ 1 & -4i & 3 \end{pmatrix} \in Mat_{4\times 3}(\mathbb{C})$$

Dal Teorema di decomposizione (complessa) sappiamo che

$$\dim \operatorname{Im} \bar{A}^t = 4 - \dim \operatorname{Ker} A = 4 - 1 = 3$$

Quindi le 3 colonne di $\bar{A}^t$ formano una base di $\operatorname{Im} \bar{A}^t$ che denotiamo $\mathcal{B}_{\operatorname{Im}\bar{A}^t}$.

Dal Teorema di decomposizione l'insieme

$$\mathcal{B} = \mathcal{B}_{\operatorname{Ker} A} \cup \mathcal{B}_{\operatorname{Im}\bar{A}^t}$$

è una base di $\mathbb{C}^4$.

La base $\mathcal{B}$ contiene una base di $\operatorname{Ker} A$ ed è quindi una base richiesta. $\boxtimes$