Sistemi di Equazioni lineari

Le equazioni lineari appaiono naturalmente nella vita quotidiana e sono la chiave per la risoluzione di problemi che provengono dalla modellizzazione matematica di fenomeni fisici, ingegneristici e anche sociali.

Vediamo alcuni facili esempi:

Es (Sett 1): Quanto bisogna prendere all'esame di Geometria (9 cfu) per avere una media pesata sui crediti di almeno 25/30, sapendo di aver ottenuto 27/30 all'esame di Disegno (6 cfu) e 19/30 a quello di Analisi 1 (9 cfu)?

Sol.: Impostiamo l'equazione nella variabile x:

$$\frac{1}{24}\left(9 \cdot 19 + 6 \cdot 27 + 9 \cdot x\right) = 25$$

$$\Rightarrow \quad 9x = 25 \cdot 24 - 9 \cdot 19 - 6 \cdot 27 = 267$$

Questa equazione ha l'unica soluzione $x = \frac{267}{9} \sim 29.6$.

Il minimo voto che bisogna prendere per avere una media di 25/30 tra i 3 esami è 30/30. $\blacksquare$

Un'equazione della forma

$$ax = b$$

si chiama eq. Lineare in una variabile x.

Una soluzione è un numero $\bar{x} \in \mathbb{R} : a\bar{x} = b$.

Sia S l'insieme delle soluzioni. Allora

$$S = \begin{cases} \left\{\frac{b}{a}\right\} & \text{se } a \neq 0 \\ \mathbb{R} & \text{se } a = 0 \text{ e } b = 0 \\ \emptyset & \text{se } a = 0 \text{ e } b \neq 0. \end{cases}$$

Es [Nicholson, es. 1.2.1]: Un istituto di beneficenza internazionale desidera destinare un fondo annuale di 50 000 € per la ricerca sul cancro. L'istituto ha a disposizione 480 000 € che investe in due banche che pagano un interesse del 10% e del 11%, risp.. Quanto deve essere investito in ciascuna banca?

Sol.: x € investiti al 10%,

y € investiti all 11%

devono soddisfare due equazioni

$$(*)\quad \begin{cases} \dfrac{10}{100}x + \dfrac{11}{100}y = 50000 \\ x + y = 480000 \end{cases}$$

devono valere contemporaneamente | Cerchiamo una soluzione comune:

$$\leadsto \begin{cases} 10x + 11y = 5000000 \\ 10x + 10y = 4800000 \end{cases}$$

Se le equazioni sono entrambe vere allora sottraendo la seconda dalla prima

$$y = 200000$$

ma allora

$$x = 480000 - y = 280000.$$

Quindi le due equazioni ammettono un' unica <u>soluzione comune</u>

$$x = 280000 \ , \ y = 200000.$$

$\boxtimes$

Un' equazione nelle variabili x_1 e x_2 si dice <u>lineare</u> se è della forma

$$a x_1 + b x_2 = c$$

per qualche $a, b, c \in \mathbb{R}$.

(x_1 e x_2 compaiono con esponente 1).

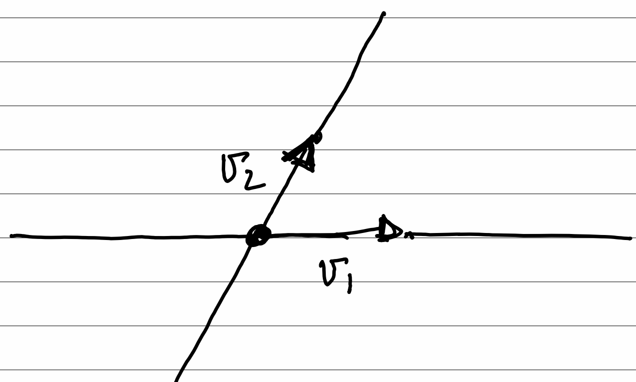
Una <u>soluzione</u> è una coppia $(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \in \mathbb{R}^2$

tale che $a\bar{x}_1 + b\bar{x}_2 = c$.

Possiamo rappresentare le soluzioni sul piano $\mathcal{E}^2$: Fissiamo una base $\mathcal{B} = \{v_1, v_2\}$ di $\mathcal{V}_0^2$ (non è necessario che $v_1 = \overrightarrow{OA}$, $v_2 = \overrightarrow{OB}$ siano ortogonali della stessa lunghezza)

Rappresentiamo le soluzioni di

$$2x + y = 0$$



Pensiamo a $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = F_{\mathcal{B}}(P)$.

Sia $r_1 = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid 2x + y = 0 \}$.

$= \{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid (2, 1) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \}$

<u>OSS</u>: $r = < \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} >$.

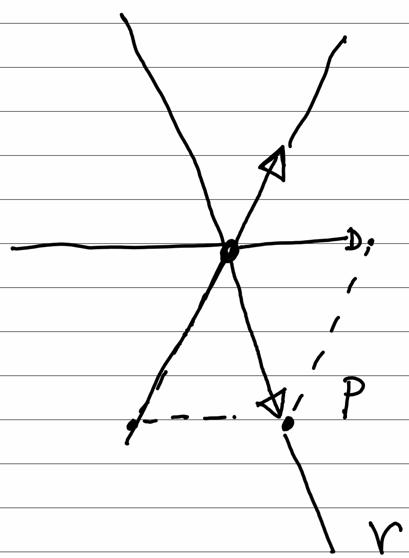
Infatti,

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \in r \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}. \Rightarrow < \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} > \subseteq r.$$

Se $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in r$ allora $y = -2x$

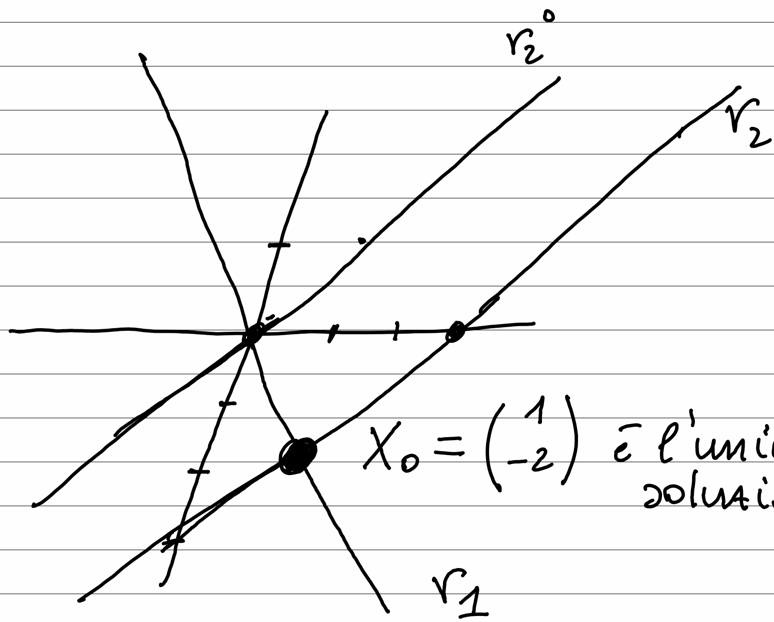
$$\Rightarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -2x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}. \quad \boxtimes$$

Sia $P \in \mathcal{E}^2$ t.c. $F_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{OP}) = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.



$$F_{\mathcal{B}}(r) = r_1$$

$$\begin{cases} 2x + y = 0 \\ x - y = 3 \end{cases} \qquad r_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \middle| \, 2x+y=0 \right\} \quad r_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \middle| \, x-y=3 \right\}$$



$X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ è l'unica soluzione

$$r_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \middle| \, (1,-1) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 3 \right\} \ni \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} = v$$

Sia $w = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in r_2$

$\Rightarrow (1,-1)(w-v) = 3-3 = 0$

$\Rightarrow w - v \in r_2^0 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \middle| \, x-y=0 \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

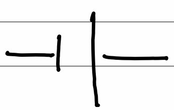
$\Rightarrow r_2 = v + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

Sistemi lineari associati a circuiti elettrici

(Si vedano le note fornite sul sito del corso). In breve:

I = intensità di corrente, misurata in Àmpere (A)

 : Resistenza, misurata in Ohms (Ω)

 : generatore di tensione, misurata in Volts (V). La corrente scorre da sinistra (-|) a destra (|-).

Legge di Ohm:

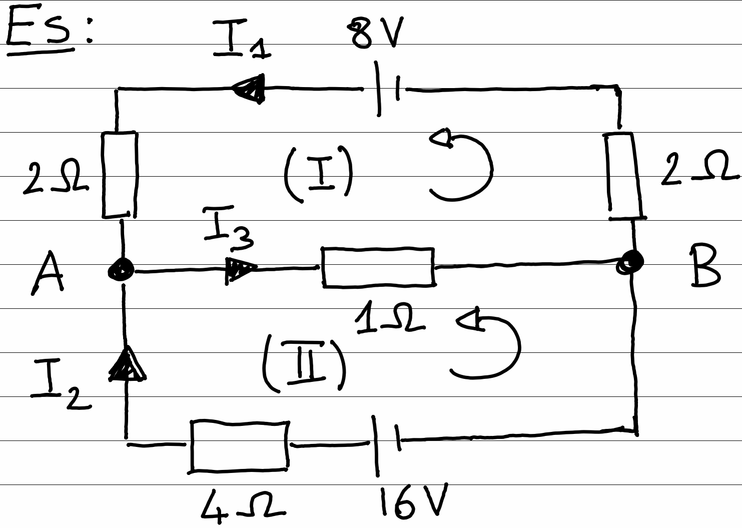
Se si applica una tensione V ai capi di una resistenza R la corrente elettrica risultante che la attraversa ha intensità I data da $\boxed{V = RI}$

Leggi di Kirchhoff

1) (legge di giunzione):
Il flusso di corrente che arriva in un nodo del circuito è uguale al flusso di corrente che ne esce

2) (Regola di maglia)
La somma algebrica delle Tensioni (dovute alle resistenze) in ogni maglia orientata deve essere uguale alla somma algebrica degli incrementi di Tensione dovuti ai generatori.

Es:



Regola di giunzione

(A) $\qquad I_1 + I_2 = I_3$

(B) $\qquad I_3 = I_2 + I_1$

Regola di maglia

(I) $\qquad I_3 + 2I_1 + 2I_1 = 8$

(II) $\qquad -I_3 - 4I_2 = -16$

Il sistema è quindi

$$\begin{cases} I_1 + I_2 - I_3 = 0 \\ 4I_1 + I_3 = 8 \\ 4I_2 + I_3 = 16 \end{cases}$$

Matrice completa

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 8 \\ 0 & 4 & 1 & 16 \end{array}\right)$$

Unica soluzione: $I_1 = 1A$, $I_2 = 3A$, $I_3 = 4A$

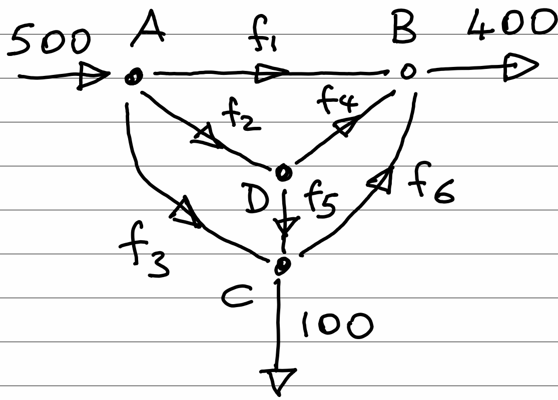
Sistemi lineari associati a reti stradali o idrauliche

Consideriamo un modello che descriva il traffico stradale basato sul seguente principio:

Legge di giunzione:
Data una rete stradale, il numero di macchine che arrivano ad un incrocio è uguale al numero di macchine che partono.

In questo modello, la determinazione del traffico si basa sulla risoluzione di un sistema lineare.
Vediamo un esempio:

Es: Consideriamo la seguente rete di strade a senso unico:



Trovare i possibili flussi di traffico lungo ogni strada.

Sol.: Dobbiamo trovare $f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6$: che soddisfano alle seguenti eq. lineari

(A) $\quad 500 = f_1 + f_2 + f_3$

(B) $\quad f_1 + f_4 + f_5 = 400$

(C) $\quad f_3 + f_5 = 100 + f_6$

(D) $\quad f_2 = f_4 + f_5$

Cerchiamo quindi le soluzioni del sistema:

$$\begin{cases} f_1+f_2+f_3=500 \\ f_1+f_4+f_5=400 \\ f_3+f_5-f_6=100 \\ f_2-f_4-f_5=0 \end{cases}$$

la matrice completa del sistema è

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 500 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 400 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 100 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

le soluzioni del sistema dipendono da 3 parametri. Ad esempio, possiamo scegliere f_4, f_5 e f_6 come parametri e otteniamo che f_1, f_2, f_3 sono ottenute così:

$$\begin{cases} f_1=400-f_4-f_6 \\ f_2=f_4+f_5 \\ f_3=100-f_5+f_6 \end{cases}$$

come impareremo a fare a breve....

Un'equazione nelle variabili $X_1, \dots, X_n$ si dice <u>lineare</u> se è della forma

$$(*) \quad a_1 X_1 + a_2 X_2 + \dots + a_n X_n = b$$

per qualche $a_1, a_2, \dots, a_n, b \in \mathbb{K}$

La matrice riga

$$A = (a_1, a_2, \dots, a_n)$$

si dice <u>matrice dei coefficienti</u> dell'equazione lineare $(*)$.

La matrice colonna

$$X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}$$

si chiama matrice delle incognite.

Una <u>soluzione</u> di $(*)$ è una matrice $\bar{X} \in \mathbb{K}^n$ t.c.

$$\boxed{A\bar{X} = b}.$$

b si chiama <u>termine noto</u> dell'eq.

Es: $X = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ è soluzione dell'equazione lineare

$$2x_1 - 3x_2 = 8$$

$Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ non è una soluzione.

Date m equazioni lineari

$$\begin{aligned}
&\text{eqn1} \quad a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \dots + a_{1n}X_n = b_1 \\
&\text{eqn2} \quad a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + \dots + a_{2n}X_n = b_2 \\
&\quad \vdots \\
&\text{eqnm} \quad a_{m1}X_1 + a_{m2}X_2 + \dots + a_{mn}X_n = b_m
\end{aligned}$$

diciamo che sono a sistema se siamo interessati a trovare una soluzione $\bar{X}$ comune a tutte le equazioni.

Mettiamo una parentesi graffa "{" per indicare un sistema di equazioni lineari.

La matrice $m \times n$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

che ha per righe le matrici dei coefficienti delle equazioni si chiama <u>matrice dei coefficienti</u> del sistema. La matrice colonna

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

che ha come componenti i termini noti delle equazioni (ordinati come nella matrice A) si chiama <u>matrice dei termini noti</u>.

La matrice a blocchi

$$(A|b)$$

si chiama <u>matrice completa</u> del sistema.

Matlab :   ∘ syms

Il comando sym crea variabili simboliche :

sym ('x', [1,3]) $\rightsquigarrow$ (x_1, x_2, x_3)

sym ('A', [2,2]) $\rightsquigarrow$ $\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$

Per scrivere l'equazione

eqn1: $x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 4$

e chiamarla eqn1

```
X = sym('x', [3,1])
```

oppure
```
syms x1, x2, x3
```

```
eqn1 = X(1) - 2*X(2) + 3*X(3) == 4
```

Data

eqn2: $2x_1 - 3x_3 = 5$

```
eqn2 = 2*X(1) - 3*X(3) == 5.
```

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 4 \\ 2x_1 - 3x_3 = 5 \end{cases}$$

```
[A, b] = equationsToMatrix(eqn1, eqn2)
```

Dato un sistema di m equazioni lineari nelle variabili $x_1, \dots, x_n$:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \in Mat_{m \times n}(\mathbb{K})$$

che ha per righe le matrici dei coeff. delle singole equazioni lineari, si chiama <u>matrice dei coefficienti del sistema</u>.

La matrice

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^m$$

si chiama <u>matrice dei termini noti</u>.

La matrice a blocchi

$$\hat{A} = (A \mid b) \in Mat_{m \times (n+1)}$$

si chiama <u>matrice completa</u>.

Una soluzione del sistema è una n-pla ordinata $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n \in \mathbb{K}$ di numeri reali tale che ponendo $x_i = \bar{x}_i$ in ogni equazione si ottiene una uguaglianza di numeri.

Quindi una soluzione del sistema è una matrice colonna $X \in \mathbb{K}^n$ t.c.

$$\boxed{AX = b} \qquad (*)$$

Risolvere il sistema $\Longleftrightarrow$ risolvere l'equazione matriciale $(*)$.

Es: Si consideri il seguente sistema di 2 equazioni lineari (="sistema lineare") nelle tre variabili x_1, x_2, x_3:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$$

La matrice dei coefficienti è

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

la matrice dei termini noti è

$$b = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}$$

la matrice completa è

$$\hat{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \end{array}\right).$$

Verifichiamo che

$$X = \begin{pmatrix} 2-t \\ 2-t \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = X_0 + t v$$

è soluzione del sistema per ogni $t \in \mathbb{R}$:

$$AX = AX_0 + t Av = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = b.$$

$\blacksquare$

Es: Si consideri il seguente sistema lineare nelle incognite x_1, x_2, x_3, x_4:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_3 = 2 \\ x_1 - 2x_2 + x_4 = 6 \end{cases}$$

Le matrici associate sono

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$: Matrice dei coefficienti

$$b = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$$: matrice dei termini noti.

$$\hat{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 0 & 1 & 6 \end{array}\right)$$: matrice completa.

Verifichiamo che

$$X = \begin{pmatrix} 1-2t \\ -\frac{5}{2} - t + s \\ 4t \\ 2s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5/2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$= X_0 + t v_1 + s v_2$$

è soluzione per ogni $s, t \in \mathbb{R}$:

$$AX = AX_0 + tAv_1 + sAv_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= b.$$ ☑

Dato un sistema

$$AX = b$$

risponderemo alle seguenti domande:

1) Per quali A e b il sistema è risolubile (ovvero ammette soluzioni)?

2) In questo caso, quali sono le soluzioni?

Dato un sistema

$$AX = b$$

di m equazioni in n incognite (quindi $A \in Mat_{m\times n}$, $X \in \mathbb{K}^n$, $b \in \mathbb{K}^m$) ci chiediamo per quali A e b esso ammette soluzioni, ovvero è "risolubile" o "compatibile".

<u>Def</u>: Lo <u>spazio delle colonne</u> di una matrice $A \in Mat_{m\times n}$ è

$$col(A) = \langle A^1, \dots, A^n \rangle \subset \mathbb{K}^m$$

è il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^m$ generato dalle n colonne $A^1, \dots, A^n$ di A.

Abbiamo già osservato che

$$\mathrm{col}(A) = \{AX \mid X \in \mathbb{R}^n\} = \mathrm{Im}(S_A)$$

Quindi una prima risposta è:

il sistema $AX=b$ è compatibile

$$\Updownarrow$$

$$b \in \mathrm{col}(A)$$

Questa semplice osservazione ci permette già di stabilire che

Se $m \leq n$ e ci sono m colonne di A linearmente indipendenti, allora il sistema $AX=b$ ammette soluzione $\forall\, b \in \mathbb{K}^m$

Infatti, in questo caso

$$\mathrm{col}(A) = \mathbb{K}^m.$$

Esempi:

Dire per quali A e b il sistema è compatibile:

1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \{A^1, A^2\}$ sono lin. ind. $\Rightarrow col(A) = \mathbb{R}^2$

$\Rightarrow AX = b$ ammette soluzione.

2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow col(A) = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \rangle \not\ni b \Rightarrow AX = b$ non ammette soluzione.

3) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \{A^1, A^2\}$ sono lin. indip. $\Rightarrow col(A) = \mathbb{R}^2$

$\Rightarrow AX = b$ ammette soluzione.

4) $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 6 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 9 \\ 18 \\ 9 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow col(A) = \langle A^1 \rangle \ni b \Rightarrow AX = b$ ha soluzione.

5) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow b \notin \langle A^1, A^2 \rangle$

$\Rightarrow AX = b$ non ammette soluzione.

<u>Def</u>: Il <u>rango</u> di una matrice $A \in Mat_{m \times n}$ è la dimensione di $col(A)$:

$$\boxed{rg(A) := \dim col(A)}$$

Quindi il rango di A è il numero massimo di colonne di A linearmente indipendenti.

<u>OSS</u>: $rg(A) \leq \min(m, n)$

Infatti, $col(A)$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{K}^m$ generato da n vettori.

Sia $r = rg(A)$ e sia $\{A^{j_1}, \dots, A^{j_r}\}$ una base di $col(A)$

[Impareremo come si trova una tale base].

Allora

$$\boxed{b \in col(A) \iff \{A^{j_1}, \dots, A^{j_r}, b\} \text{ è lin Dip.}}$$

Consideriamo la matrice completa

$$\hat{A} = (A \mid b).$$

Per definizione,

$$col\, \hat{A} = \langle A^1, \dots, A^n, b \rangle$$

Si ha

$$\boxed{col\, \hat{A} = \langle A^{j_1}, \dots, A^{j_r}, b \rangle}$$

Infatti,

$$\{A^{j_1}, \dots, A^{j_r}, b\} \subseteq col\, \hat{A}$$

e quindi anche il loro span lo è.

Viceversa, per ogni $i \in \{1, \dots, n\}$,

$$A^i \in \langle A^{j_1}, \dots, A^{j_r} \rangle \subseteq \langle A^{j_1}, \dots, A^{j_r}, b \rangle$$

(perché $\{A^{j_1}, \dots, A^{j_r}\}$ è una base di $col(A)$)

e quindi $col\, \hat{A} \subseteq \langle A^{j_1}, \dots, A^{j_r}, b \rangle$.

In particolare,

$$rg(\hat{A}) = \dim \langle A^{j_1}, \dots, A^{j_r}, b \rangle$$

e quindi

$$\boxed{rg(A) = r \leq rg(\hat{A}) \leq r+1.}$$

(Questo segue dal fatto che col $\hat{A}$ contiene un insieme lin. Ind. composto da r vettori $\{A^{j_1}, \dots, A^{j_r}\}$).

Allora

$$b \in \mathrm{col}A \iff b \in \langle A^{j_1}, \dots, A^{j_r} \rangle$$

$$\iff \{A^{j_1}, \dots, A^{j_r}, b\} \text{ è lin. Dip.}$$

$$\iff rg(\hat{A}) = rg(A).$$

Abbiamo dimostrato:

TEOREMA (di Rouché-Capelli)

$$\boxed{AX = b \text{ è compatibile} \iff rg(A) = rg(\hat{A})}$$

Es: Utilizzare il Teorema di Rouché-Capelli per stabilire se i seguenti sistemi sono o meno compatibili:

1) $$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_4 = 3 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 18 \end{cases}$$

2) $$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 1 \\ 2x_1 - x_2 = 2 \\ x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 + 2x_2 = 1 \end{cases}$$

3) $$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 - x_3 = 2 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

4) $$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = -3 \\ 2x_1 + 4x_2 = -6 \end{cases}$$

5) $$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 3 \\ 2x_1 - x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 = 10 \end{cases}$$

Sol. :

1) $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 3 \\ 18 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow col(A) = \langle A^1, A^2 \rangle = \mathbb{R}^2 \Rightarrow rg\, A = 2$ e $b \in col(A)$

$\Rightarrow rg(\hat{A}) = 2 = rg(A) \Rightarrow$ Ha soluzione.

2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = A^1$

$\Rightarrow b \in col(A) \Rightarrow rg\, \hat{A} = rg A$.

3) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

$rg\, A = ?$: $\{A^1, A^2\}$ sono evidentemente lin. Ind.. Vediamo se $A^3 \in \langle A^1, A^2 \rangle$.

Facciamo un cambio di generatori:

$$u = A^1 + A^2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 3u'$$

Per il lemma di scambio

$$\langle A^1, A^2 \rangle = \langle u', A^2 \rangle = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$$

Se $A^3 = t_1 u' + t_2 A^2$ allora $t_2 = 1$

perché $u_2^1 = 0$ e $A_2^2 = -1 = A_2^3$.

Ma allora $t_1 + 2 = 3$ (dalla prima componente) e $t_1+2=1$ (dalla terza componente). Non è possibile. Ne segue che

$A^3 \notin \langle A^1, A^2 \rangle \Rightarrow col(A) = \mathbb{R}^3$.

$\Rightarrow rg\, A = 3 \Rightarrow rg\, \hat{A} = 3 = rg\, A$.

$\Rightarrow$ Ha Sol.

$\uparrow$

$rg\, \hat{A} \le \min(3,4)$

4) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \end{pmatrix} = (-3) A^1$

$col(A) = \langle A^1 \rangle \ni b \Rightarrow rg\, A = 1 = rg\, \hat{A}$.

$\Rightarrow$ Ha soluzione.

5) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 10 \end{pmatrix}$

$\{A^1, A^2\}$ sono lin. Ind. Vediamo se $b \in \langle A^1, A^2 \rangle$

Poniamo $u = A^1 - A^2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$\langle A^1, A^2 \rangle = \langle u, A^2 \rangle = \langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle \not\ni b$. ■

Al momento, il Teorema di Rouché-Capelli, non sembra molto utile, perché non abbiamo ancora le tecniche per calcolare il <u>rango</u>.
Prima di svilupparle, occupiamoci di rispondere alla domanda:

Se $AX=b$ è compatibile, come sono fatte le sue soluzioni?
Per rispondere dobbiamo considerare il sistema

$$\boxed{AX = 0_{\mathbb{K}^m}}$$

che si chiama <u>sistema omogeneo</u> associato ad A. Le sue soluzioni sono il sottospazio vettoriale $\operatorname{Ker} A = \operatorname{Ker} S_A$.

TEOREMA (di struttura dei sistemi lineari)

Sia $AX=b$ un sistema risolubile.
Sia X_0 una soluzione del sistema.
Allora l'insieme S delle soluzioni è
il sottospazio affine di $\mathbb{K}^n$ dato da

$$\boxed{S = X_0 + \operatorname{Ker} A}$$

In particolare, $\dim S = n - \operatorname{rg} A$.

dim: Sia X una soluzione del sistema. Allora

$$A(X-X_0) = AX - AX_0 = b - b = 0_{\mathbb{K}^m}$$

e quindi $X - X_0 \in \operatorname{Ker} A$. Ne segue che

$$X = X_0 + (X - X_0) \in X_0 + \operatorname{Ker} A.$$

Viceversa, $\forall Z \in \operatorname{Ker} A$:

$$A(X_0+Z) = AX_0 + AZ = b + 0_{\mathbb{K}^m} = b$$

$\Rightarrow X_0 + Z$ è soluzione del sistema ∎

<u>COR</u>: Sia $AX=b$ un sistema compatibile. Allora esso ammette un'unica soluzione se e solo se

$$rg\, A = n.$$

Se $rg\, A < n$ ci sono infinite soluzioni.

<u>dim</u>: Le soluzioni formano uno spazio affine di dimensione

$$n - rg A. \qquad \blacksquare$$

Rimane il problema di calcolare il rango di una matrice e di trovare le soluzioni di un sistema risolubile.
Vedremo, nel prossimo capitolo, che questo si può fare in maniera algoritmica con l'ALGORITMO DI GAUSS.

Ricapitolando, il Teorema di struttura dei sistemi lineari ci dice che ci sono 3 possibilità per lo spazio delle soluzioni di un sistema $AX=b$ di m equazioni lineari in n incognite (i.e. $A \in Mat_{m \times n}$, $b \in \mathbb{K}^m$, $X \in \mathbb{K}^n$):

1) Non ci sono soluzioni
$\left(b \notin col(A) \Leftrightarrow rg(A) \lneq rg(A|b) \right)$

2) C'è un'unica soluzione
$\left(b \in col(A) \text{ e } rg(A|b) = rg(A) = n \right)$

3) Ci sono infinite soluzioni
$\left(b \in col(A) \text{ e } rg(A|b) = rg(A) > n \right)$

Nel caso (3), sia

$$\{v_1, \dots, v_{n-rg(A)}\} \subset \operatorname{Ker} A \subset \mathbb{K}^n$$

una base di $\operatorname{Ker} A$ e sia $X_0 \in \mathbb{K}^n$ una soluzione particolare del sistema. Allora tutte le soluzioni sono della forma

$$X_0 + t_1 v_1 + \dots + t_{n-rg(A)} v_{n-rg(A)}$$

al variare di $t_1, \dots, t_{n-rg(A)} \in \mathbb{K}$

Quindi le soluzioni dipendono dagli $n-rg(A)$ parametri liberi

$$t_1, \dots, t_{n-rg(A)}.$$

In questo caso diciamo che ci sono

$$\infty^{n-rg(A)}$$

soluzioni.

Matlab:

X = sym('x', [n, 1])

eqn1, ..., eqnm : m equazioni

Es: $\begin{cases} x_1 - x_3 = 3 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$

X = sym('x', [3, 1])

eqn1 = X(1) - X(3) == 3

eqn2 = 2*X(1) + X(2) + X(3) == 2

[A, b] = equationsToMatrix(eqn1, ..., eqnm)

X0 = A \ b ⟶ 1) 'system inconsistent'

2) Una soluzione particolare.

Nel caso 2:

V = null(A) = matrice che ha per colonne una base di Ker A

[m, n] = size(A). r = rank(A).

V1 = V(:;1), V2 = V(:;2), ..., Vn-r = V(:;n-r)

T = sym('t', [n-r, 1])

$\boxed{S = X0 + V * T}$ soluzioni

$$S = X0 + t_1 v_1 + \dots + t_{n-r} v_{n-r}.$$

<u>Es</u>: Trovare tutte le soluzioni dell'eq. lineare

$$2x_1 + x_2 - x_3 = 3$$

nelle incognite x_1, x_2, x_3.

<u>Sol.</u>: La matrice dei coefficienti è

$$A = (2, 1, -1) \in Mat_{1\times 3}$$

la matrice dei termini noti è

$$b = 3 \in Mat_{1\times 1}.$$

Ponendo $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in Mat_{3\times 1}$ il sistema da risolvere è $AX = b$.

Troviamo una soluzione del sistema:

ad esempio $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Troviamo una base per

$$\operatorname{Ker} A = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid 2x_1 + x_2 - x_3 = 0 \right\}$$

Dato che $rg(A) = 1$, dalla formula delle dimensioni, $\dim \operatorname{Ker} A = 3 - rg A = 2$

(In effetti ci sono 2 variabili libere:

$x_2 = x_3 - 2x_1$)

Poniamo $x_1 = 1$ e $x_3 = 0$. Allora $x_2 = -2$

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Poniamo $x_1 = 0$ e $x_3 = 0$. Allora $x_2 = 1$

$$v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$\{v_1, v_2\} \subset \operatorname{Ker} A$ è lin. Ind. e quindi è una base di $\operatorname{Ker} A$, poiché

$$\dim \operatorname{Ker} A = |\{v_1, v_2\}|.$$

Lo spazio delle soluzioni è

$$X_0 + \langle v_1, v_2 \rangle = \left\{ \begin{pmatrix} 1 + t_1 \\ 1 - 2t_1 + t_2 \\ t_2 \end{pmatrix} \mid t_1, t_2 \in \mathbb{R} \right\} \boxtimes$$

Es: Determinare, se esistono, tutte le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 3 \\ x_1 - x_2 \qquad = 1 \end{cases}$$

nelle variabili reali x_1, x_2, x_3.

Sol.: La matrice dei coefficienti è

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice dei termini noti è

$$b = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Poiché A ha 2 colonne lin. indipendenti (ad esempio la seconda e la terza),

$$rg(A) = 2$$

Quindi, $rg(A|b) = 2 = rg(A)$.

Dal Teorema di Rouché-Capelli deduciamo che il sistema è risolubile.

Le soluzioni dipendono da $3-2=1$ parametro (ovvero lo spazio delle soluzioni ha dimensione 1).

Cerchiamo una soluzione:

ad esempio $X_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Cerchiamo una base $\{v\}$ di Ker A:

$$\operatorname{Ker} A = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 = 0 \end{cases} \right\}$$

Possiamo scegliere

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Le soluzioni sono

$$X_0 + \langle v \rangle = \left\{ \begin{pmatrix} 2+t \\ 1+t \\ 2+3t \end{pmatrix} \;\middle|\; t \in \mathbb{R} \right\}$$

$\blacksquare$