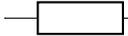


Sistemi lineari associati a circuiti elettrici

In un circuito elettrico è spesso necessario trovare l'intensità della corrente in amperes (A) che scorre nei suoi vari rami. Il circuito contiene solitamente resistenze e generatori di corrente. Le resistenze si indicano con il simbolo  e sono misurate in Ohms (Ω). La tensione nei generatori di corrente viene misurata in volts (V). Adoperiamo il simbolo  per denotare un generatore di tensione in cui la corrente scorre da sinistra a destra: si noti che la stanghetta di sinistra è più corta di quella di destra. Assumiamo che i generatori non procurino alcuna resistenza al circuito. Una *maglia* (o circuito chiuso) di un circuito elettrico è un percorso chiuso che partendo da un nodo torna allo stesso nodo senza attraversare uno stesso ramo due volte. Ogni maglia può essere orientata in senso orario od in senso anti-orario. Se scegliamo un'orientazione allora parliamo di *maglia orientata*. Il flusso di corrente è governato dalle seguenti leggi:

Legge di Ohm:

Se si applica una tensione V ai capi di una resistenza R , la corrente elettrica risultante che la attraversa ha intensità I data dall'equazione:
 $V = RI$.

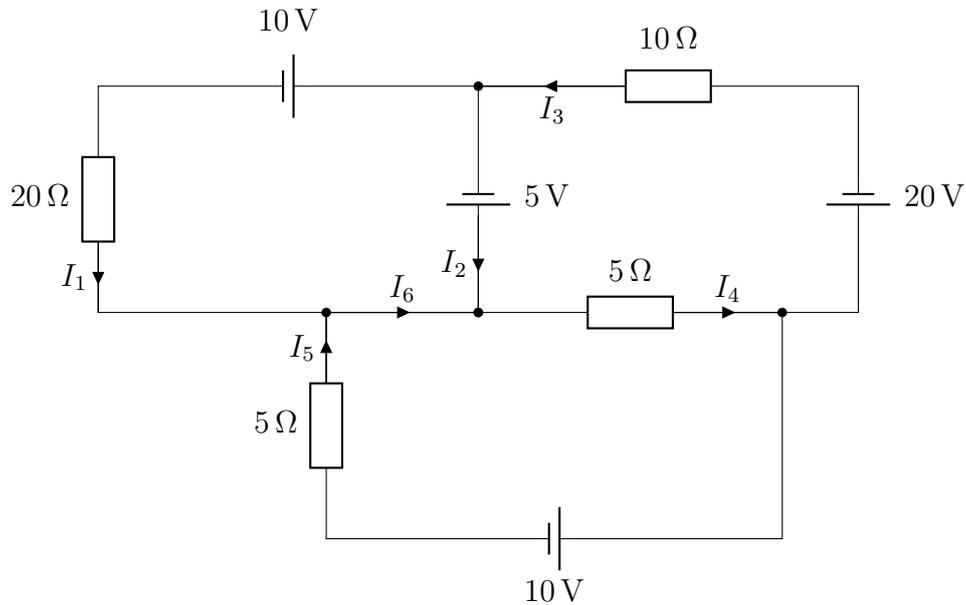
Leggi di Kirchhoff:

1. (Regola di giunzione) Il flusso di corrente che arriva in un nodo del circuito è uguale al flusso di corrente che ne esce.
2. (Regola della maglia) In ogni maglia orientata, la somma algebrica delle tensioni dovute alle resistenze è uguale alla somma algebrica delle tensioni dovute ai generatori.

Nell'applicare la seconda legge di Kirchhoff, bisogna scegliere un'orientazione (oraria o anti-oraria) di ogni maglia del circuito e considerare una tensione positiva se si propaga nella direzione scelta e negativa se si propaga nella direzione opposta. Questo spiega perchè abbiamo dovuto specificare "somma

algebraica”.

Esempio Trovare le varie correnti nel seguente circuito elettrico.



Soluzione Si noti che abbiamo fissato la direzione del flusso di corrente in ogni segmento del circuito (un segmento è un ramo del circuito tra un nodo ed un altro). Le incognite del problema sono le intensità di corrente I_1, \dots, I_6 nei sei segmenti del circuito. Per la legge di giunzione attorno ai quattro nodi valgono le seguenti equazioni:

$$\begin{aligned} I_2 + I_3 &= I_1 \\ I_1 + I_5 &= I_6 \\ I_6 &= I_2 + I_4 \\ I_4 &= I_3 + I_5 \end{aligned}$$

Orientiamo ogni maglia in senso anti-orario. La legge di maglia ci dice che lungo ogni maglia la somma algebrica dei voltaggi è uguale a zero. Per calcolare i voltaggi nel passaggio attraverso ogni resistenza utilizziamo la legge di Ohm. Otteniamo quindi le tre equazioni di maglia

$$\begin{aligned} 10 + 5 &= 20I_1 \\ -5 + 20 &= 10I_3 + 5I_4 \\ -10 &= -5I_5 - 5I_4 \end{aligned}$$

Dobbiamo quindi studiare il sistema di 7 equazioni in 6 incognite la cui

matrice completa è data da

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 20 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 15 \\ 0 & 0 & 10 & 5 & 0 & 0 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & -5 & 0 & -10 \end{array} \right)$$

Questo sistema ammette un'unica soluzione che si può trovare ad esempio con la formula di Cramer. Essa è

$$I_1 = \frac{15}{20}$$

$$I_2 = -\frac{1}{20}$$

$$I_3 = \frac{16}{20}$$

$$I_4 = \frac{28}{20}$$

$$I_5 = \frac{12}{20}$$

$$I_6 = \frac{27}{20}$$