Spazi Vettoriali

Def: Uno spazio vettoriale su un campo $\mathbb{K}$, o $\mathbb{K}$-spazio vettoriale, è una tripla $(V, +, \cdot)$ composta da un insieme V, un'operazione

$$+ : V \times V \to V : (v_1, v_2) \mapsto v_1 + v_2$$

ed un prodotto per scalari

$$\cdot : \mathbb{K} \times V \to V \quad (c, v) \mapsto cv$$

con le seguenti proprietà:

$$\left.\begin{array}{l}
(SV1): (v_1 + v_2) + v_3 = v_1 + (v_2 + v_3) \\
(SV2): \exists\, 0_V \in V \text{ t.c. } v + 0_V = 0_V + v = v \\
(SV3): \forall v \in V\ \exists\, w \in V \text{ t.c. } v + w = w + v = 0_V \\
(SV4): v_1 + v_2 = v_2 + v_1
\end{array}\right\} \begin{array}{l}(V, +) \\ \text{è un} \\ \text{gruppo} \\ \text{abeliano}\end{array}$$

$(SV5)$: $(a+b)v = av + bv$

$(SV6)$ $(ab)v = a(bv)$

$(SV7)$ $a(v_1 + v_2) = av_1 + av_2$

$(SV8)$ $1v = v$

$\forall v_1, v_2, v_3, v, w \in V$

$\forall a, b \in \mathbb{K}$.

Gli spazi vettoriali sono strutture formali che dobbiamo imparare a conoscere e maneggiare.

Def: Un vettore è un elemento di uno spazio vettoriale

Prima di discutere le proprietà degli spazi vettoriali, facciamo qualche esempio.

prodotto per scalari

Es: $(Mat_{m\times n}(\mathbb{K}), +, \cdot)$ è un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale

In particolare,

$$\mathbb{R}^n := Mat_{n\times 1} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \middle| x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}}_{n \text{ volte}}$$

= insieme delle n-uple ordinate di numeri reali (scritti in colonna)

è uno spazio vettoriale.

NB: Le n-uple sono ordinate!

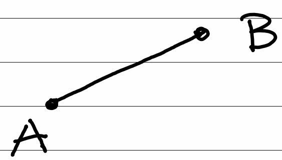
$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ in } \mathbb{R}^2.$$

Es 2: (Vettori geometrici del piano).

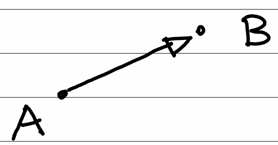
Consideriamo $\mathcal{E}^2$ (il piano euclideo).

Fissiamo un punto $O \in \mathcal{E}^2$.

Dati due punti A e B di $\mathcal{E}^2$ denotiamo con $\overline{AB}$ il segmento di estremi A e B

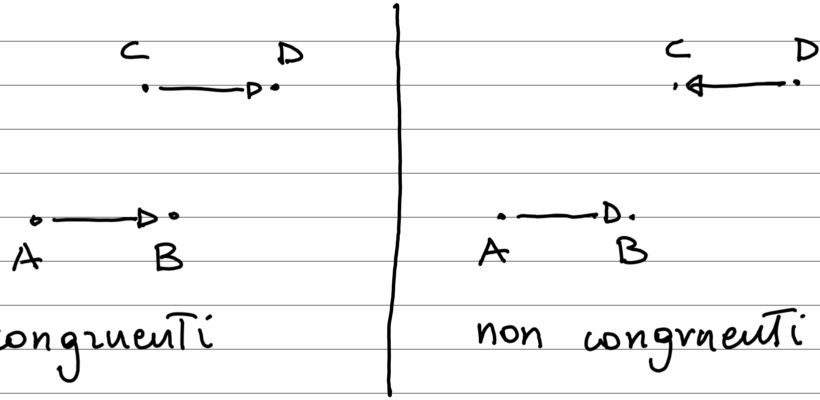


Denotiamo con $\overrightarrow{AB}$ il segmento orientato da A a B



Diciamo che $\overrightarrow{AB}$ è congruente a $\overrightarrow{CD}$ se

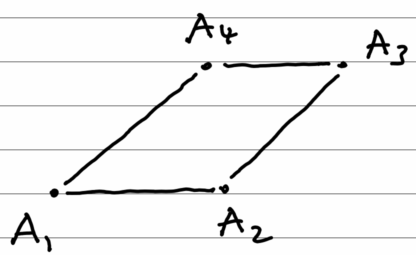
1) $\overline{AB}$ è congruente a $\overline{CD}$
2) $\overline{AB}$ è parallelo a $\overline{CD}$
3) $\overrightarrow{AB}$ è orientato come $\overrightarrow{CD}$:



congruenti | non congruenti

Scriviamo $\overrightarrow{AB} \equiv \overrightarrow{CD}$.

<u>Es</u>: Consideriamo un parallelogramma

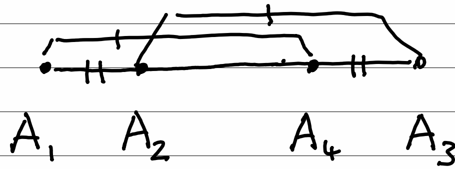


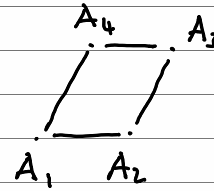
allora

$$\overrightarrow{A_1A_2} \equiv \overrightarrow{A_4A_3} \quad e$$
$$\overrightarrow{A_2A_3} \equiv \overrightarrow{A_1A_4}.$$

<u>NB</u>: $\overrightarrow{A_1A_2} \not\equiv \overrightarrow{A_3A_4}$

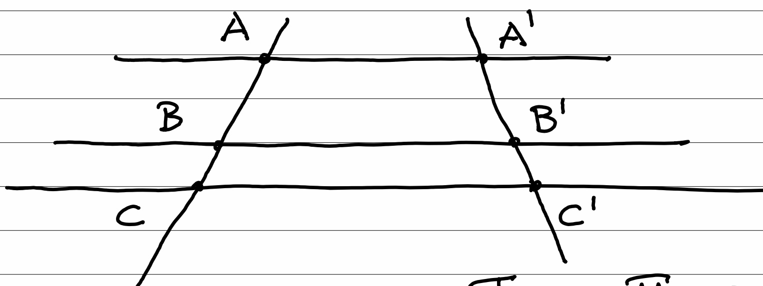
Vale anche se il parallelogramma è degenere





$$\overrightarrow{A_1A_2} \equiv \overrightarrow{A_4A_3}\ , \quad \overrightarrow{A_2A_3} \equiv \overrightarrow{A_1A_4}\ .$$

Teorema di Talete



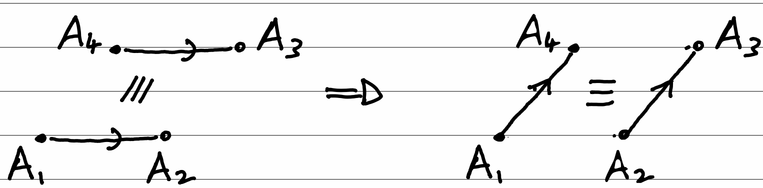
$$\frac{|\overline{AC}|}{|\overline{AB}|} = \frac{|\overline{A'C'}|}{|\overline{A'B'}|}$$

Tre rette parallele tagliano rispettivamente su due rette trasversali coppie di segmenti di lunghezze proporzionali.

Teorema del parallelogramma

Un quadrilatero è un parallelogramma se e solo se ha due lati opposti paralleli e congruenti.

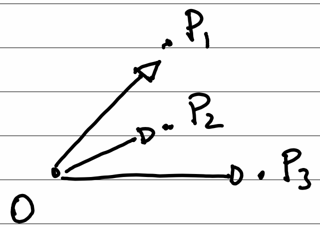
<u>OSS</u>: Da questo Teorema deduciamo:
Dato un quadrilatero Q di vertici $A_1 A_2 A_3 A_4$, se $\overrightarrow{A_1 A_2} \equiv \overrightarrow{A_4 A_3}$ allora anche $\overrightarrow{A_2 A_3} \equiv \overrightarrow{A_1 A_4}$.



Def: (Vettori geometrici del piano applicati a O)

Fissiamo un punto $O \in \mathcal{E}^2$ e definiamo

$$\mathcal{V}_O^2 = \{ \overrightarrow{OP} : P \in \mathcal{E}^2 \}$$



$\overrightarrow{OP_1}, \overrightarrow{OP_2}, \overrightarrow{OP_3} \in \mathcal{V}_O^2$

$\overrightarrow{P_1P_2} \notin \mathcal{V}_O^2$.

Diamo all'insieme $\mathcal{V}_O^2$ dei vettori geometrici del piano applicati al punto $O \in \mathcal{E}^2$ una struttura di spazio vettoriale su $\mathbb{R}$.

Dobbiamo definire una somma

$$+ : \mathcal{V}_O^2 \times \mathcal{V}_O^2 \to \mathcal{V}_O^2$$

ed un prodotto per scalari

$$\cdot : \mathbb{R} \times \mathcal{V}_O^2 \to \mathcal{V}_O^2$$

Def: Somma in $\mathcal{V}_O^2$:

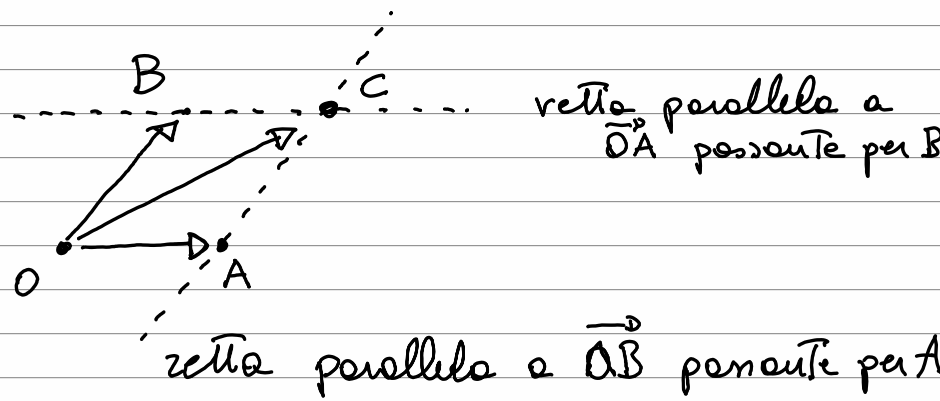
Dati $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB} \in \mathcal{V}_O^2$ definiamo

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} =: \overrightarrow{OC}$$

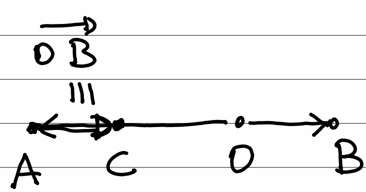
dove C è l'unico punto t.c. $\overrightarrow{AC} \equiv \overrightarrow{OB}$.

Es:

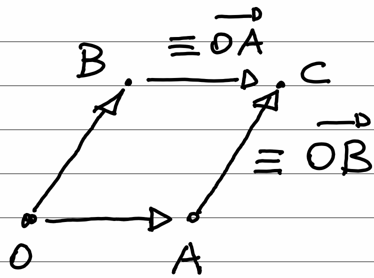
•)



•)



Metodo punta-coda:



$\overrightarrow{AC} \equiv \overrightarrow{OA}$

Spostare $\overrightarrow{OB}$ sulla punta di $\overrightarrow{OA}$ in maniera che O coincida con A.

Prop.: $(\mathcal{V}_O^2, +)$ è un gruppo commutativo.

dim:

·) El. Neutro: $\overrightarrow{OO}$. Infatti

$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OO} = \overrightarrow{OC}$ dove C è il punto tale che $\overrightarrow{AC} \equiv \overrightarrow{OO}$. Ma allora $C = A$.

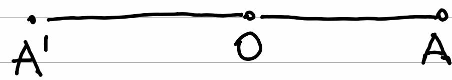
·) Commutativo:

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC} \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \overrightarrow{AC} \equiv \overrightarrow{OB}$$

$$\underset{\substack{\text{Teorema} \\ \text{parallelogramma}}}{\Longleftrightarrow} \overrightarrow{BC} \equiv \overrightarrow{OA} \underset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OC}$$

•) <u>El. opposto</u>: Dato un punto $A \in \mathcal{E}^2$ esiste un unico punto $A' \in \mathcal{E}^2$ t.c.

$$\overrightarrow{A'O} \equiv \overrightarrow{OA}$$



$$-\overrightarrow{OA} := \overrightarrow{OA'}.$$

Allora $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OA'} = \overrightarrow{OC}$ dove C è t.c.

$$\overrightarrow{AC} \equiv \overrightarrow{OA'} \equiv \overrightarrow{AO}$$

$$\Rightarrow \quad C = O.$$

•) <u>Associatività</u>: Dobbiamo dimostrare

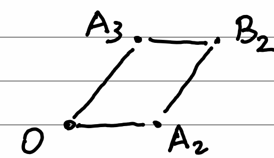
$$\left(\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2}\right) + \overrightarrow{OA_3} = \overrightarrow{OA_1} + \left(\overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OA_3}\right).$$

Poniamo

$$\vec{OB_1} := \vec{OA_1} + \vec{OA_2}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{A_1B_1} \equiv \vec{OA_2} \iff \boxed{\vec{A_2B_1} \equiv \vec{OA_1}} \quad (a)$$

$$\vec{OB_2} := \vec{OA_2} + \vec{OA_3}$$

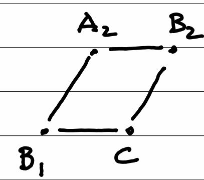


$$\Rightarrow \quad \boxed{\vec{A_2B_2} \equiv \vec{OA_3}} \quad (b)$$

$$\vec{OC} := \vec{OB_1} + \vec{OA_3} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{B_1C} \equiv \vec{OA_3}} \quad (c)$$

Dimostriamo che

$$\vec{OC} = \vec{OA_1} + \vec{OB_2}$$

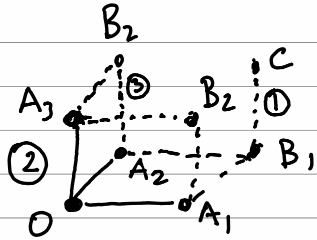


$$\vec{B_1C} \underset{(c)}{\equiv} \vec{OA_3} \underset{(b)}{\equiv} \vec{A_2B_2}$$

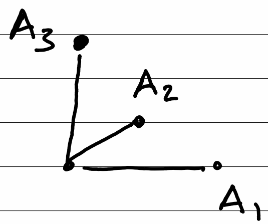
$$\underset{\text{Teo. Par.}}{\Rightarrow} \quad \vec{B_2C} \equiv \vec{A_2B_1} \underset{(a)}{\equiv} \vec{OA_1} \Rightarrow \vec{B_2C} \equiv \vec{OA_1}$$

$$\underset{\text{Def}}{\iff} \quad \vec{OC} = \vec{OB_2} + \vec{OA_1} \underset{\text{commutatività}}{=} \vec{OA_1} + \vec{OB_2}.$$

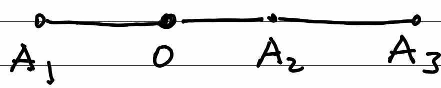
$\square$



Es: 1) Ripercorrere la dimostrazione dell'associatività nel caso

1) 

Dov'è B_1 ?
Dov'è B_2 ?
Dov'è C ?

2) 

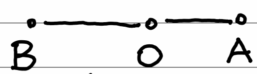
Def: Dato $\lambda \in \mathbb{R}$ e $\overrightarrow{OA} \in \mathcal{V}_O^2$ definiamo

$$\lambda \overrightarrow{OA} =: \overrightarrow{OB}$$

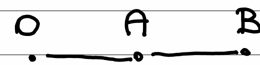
dove B è il punto sulla retta per $\overline{OA}$ t.c.

1) $|\overline{OB}| = |\lambda| \, |\overline{OA}|$

2) B è sulla semiretta OA se $\lambda > 0$,
B è sull'altra semiretta se $\lambda < 0$.



$(\lambda < 0)$



$(\lambda > 0)$

NB: Se $\lambda = 0$ allora $B = O$, poiché l'unico segmento con estremo O di lunghezza zero è $\overline{OO}$.

OSS 1: $\lambda \overrightarrow{OO} = \overrightarrow{OO} \quad \forall \lambda$.
Infatti $\overrightarrow{OO}$ è l'unico elemento di $\mathcal{V}_O^2$ di lunghezza 0.

<u>Proposizione</u>: Dati $a, b \in \mathbb{R}$, $A, B \in \mathcal{E}^2$: valgono le seguenti uguaglianze in $\mathcal{V}_O^2$

(1) $(a+b)\,\vec{OA} = a\,\vec{OA} + b\,\vec{OA}$

(2) $(ab)\,\vec{OA} = a\,(b\,\vec{OA})$

(3) $1\,\vec{OA} = \vec{OA}$

(4) $a\,(\vec{OA} + \vec{OB}) = a\,\vec{OA} + a\,\vec{OB}$

<u>dim</u>: (1) Poniamo

$\vec{OC} := (a+b)\,\vec{OA}$, $\vec{OA_1} := a\,\vec{OA}$, $\vec{OA_2} = b\,\vec{OA}$, $\vec{OD} = \vec{OA_1} + \vec{OA_2}$.

Dobbiamo dimostrare che $\boxed{C = D}$.

Possiamo assumere che $a \neq 0$ e $b \neq 0$ e $a \leq b$.

Se $A = O$ l'uguaglianza è vero per l'oss 1.

Supponiamo $A \neq O$. Ci sono quattro casi:

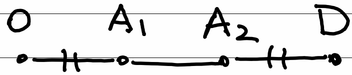
1) $a, b > 0$

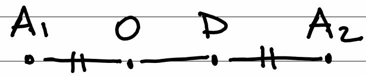
2) $a < 0 < b$ e $|a| \leq |b|$

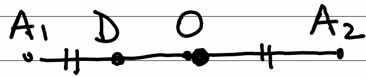
3) $a < 0 < b$ e $|a| > |b|$

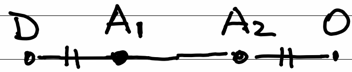
4) $a, b < 0$.

Scrivendo A a destra di O, essi corrispondono alle seguenti 4 situazioni:

1)  $(a, b > 0)$

2)  $(a < 0 < b,\ |a| \leq |b|)$

3)  $(a < 0 < b,\ |a| > |b|)$

4)  $(a, b < 0)$

Si noti che $|\overline{OA_1}| = |\overline{A_2D}|$ e $|\overline{OA_2}| = |\overline{A_1D}|$, poiché $\vec{OD} = \vec{OA_1} + \vec{OA_2}$. Analizziamoli separatamente:

1) $|\overline{OD}| = |\overline{OA_1}| + |\overline{A_1D}| = |\overline{OA_1}| + |\overline{OA_2}| = a\,|OA| + b\,|OA|$

$$= (a+b)\,|OA| = |OC|$$

Poiché C e D sono a destra di O si ha $D = C$

2) $|\overline{OA_2}| = |\overline{OD}| + |\overline{DA_2}| = |\overline{OD}| + |\overline{OA_1}|$. Quindi

$$|\overline{OD}| = |\overline{OA_2}| - |\overline{OA_1}| = |b|\,|\overline{OA}| - |a|\,|OA| =$$

$$= (|b| - |a|)\,|\overline{OA}| = |a+b|\,|\overline{OA}| = |\overline{OC}|$$

Poiché D e C sono a destra di O si ha $D = C$.

3) $|\overline{OA_1}| = |\overline{OD}| + |\overline{A_1D}| = |\overline{OD}| + |\overline{OA_2}|$. Quindi

$$|\overline{OD}| = |\overline{OA_1}| - |\overline{OA_2}| = (|a| - |b|)\,|OA| = |a+b|\,|OA| = |OC|$$

Poiché D e C sono entrambi a sinistra di O, ne segue che $D = C$.

4) $|\overline{OD}| = |\overline{OA_1}| + |\overline{OA_2}| = (|a| + |b|)|OA| \overset{a,b<0}{=} |a+b|\,|\overline{OA}|$

$= |\overline{OC}|$

Poiché D e C sono entrambi a sinistra di O, ne segue che $D = C$. $\blacksquare$

2) $(ab)(\overrightarrow{OA}) = a(b\,\overrightarrow{OA})$.

Poniamo $\overrightarrow{OA_1} = (ab)\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OA_2} = b\,\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OA_3} = a\,\overrightarrow{OA_2}$.

Possiamo supporre $ab \neq 0$.

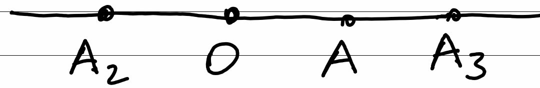
$|\overline{OA_1}| = |ab|\,|\overline{OA}| = |a|\,|b|\,|\overline{OA}| = |a|\,|\overline{OA_2}| = |\overline{OA_3}|$

Rimane da dimostrare che A_1 e A_3 sono dalla stessa parte rispetto a O:

Se $ab > 0$ allora $a, b > 0$ oppure $a, b < 0$.

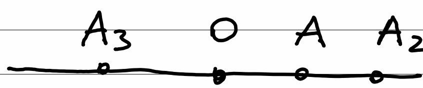
Quindi A_3 è sulla stessa semiretta di A.

Se a e b sono positivi, A_2 è nella stessa semiretta di A e A_3 è sulla semiretta di A_2 che coincide con quella per A e abbiamo finito. Se a e b sono negativi, allora la situazione è

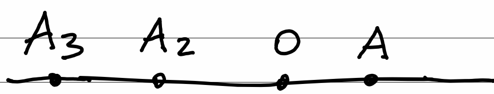


ovvero A_2 giace sulla semiretta che non contiene A ma A_3 giace sulla semiretta che non contiene A_2 e che quindi contiene A. Abbiamo finito.

Se $ab<0$ allora



$b>0$, $a<0$



$b<0$, $a>0$

In entrambi i casi A_3 giace sulla semiretta che non contiene A. ■

(3) $1\,\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OA}$. Poniamo $\overrightarrow{OB}=1\,\overrightarrow{OA}$. Allora $|\overline{OB}|=|\overline{OA}|$ e A e B giacciono dalla stessa parte rispetto a O.

(4) $a(\vec{OA}+\vec{OB}) = a\,\vec{OA} + a\,\vec{OB}$.

dim: Possiamo assumere $A \neq O$, $B \neq O$, $a \neq 0$.

Se A, O e B sono allineati, allora

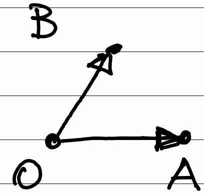
$$\vec{OB} = t\,\vec{OA}$$

per $|t| = \dfrac{|\vec{OB}|}{|\vec{OA}|}$. Quindi,

$$\begin{aligned} a(\vec{OA}+\vec{OB}) &= a(\vec{OA}+t\,\vec{OA}) = \\ &= a\,(1+t)\,(\vec{OA}) \\ &\underset{(1)}{=} (a+at)\,\vec{OA} \\ &\underset{(2)}{=} a\,\vec{OA} + (at)\vec{OA} \\ &\underset{(1)}{=} a\,\vec{OA} + a(t\,\vec{OA}) \\ &\underset{(2)}{=} a\,\vec{OA} + a\,\vec{OB}. \end{aligned}$$

Possiamo quindi assumere che i 3 punti O, A e B non siano allineati.

Abbiamo quindi la seguente situazione



Ci sono due casi: 1) $a>0$, 2) $a<0$.

<u>Caso 1</u>): $a>0$:

Poniamo $\overrightarrow{OA_1} = a\,\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$.

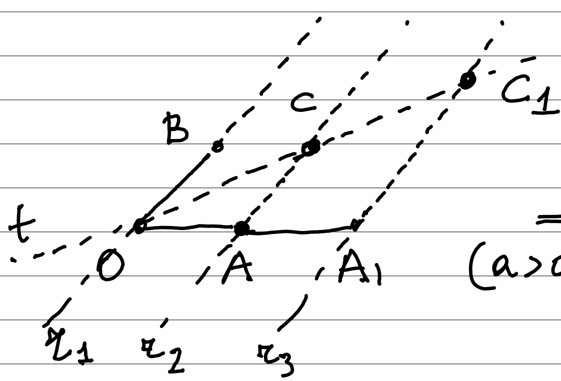
Siano. r_1 = retta per O e B.

r_2 = retta per A parallela a r_1

r_3 = retta per A_1 parallela a r_2

t = retta per O e C.

$C_1 := t \cap r_3$



Da Talete abbiamo

$$\frac{|\overline{OC_1}|}{|\overline{OC}|} = \frac{|\overline{OA_1}|}{|\overline{OA}|} = a$$

$\overset{(a>0)}{\Longrightarrow}$ $\boxed{\overrightarrow{OC_1} = a\,\overrightarrow{OC}}$ (*)

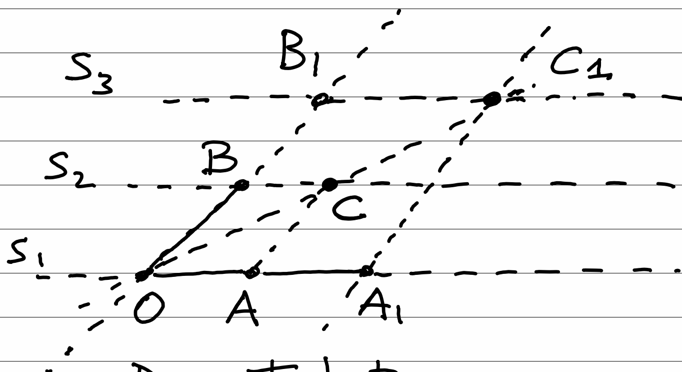
Siano

$s_1 =$ retta per O e A

$s_2 =$ retta per B parallela a s_1

$s_3 =$ retta per C_1 parallela a s_1

$B_1 := s_3 \cap r_1$



Da Talete

$$\frac{|\overline{OB_1}|}{|\overline{OB}|} = \frac{|\overline{OC_1}|}{|\overline{OC}|} = a \qquad (**)$$

Quindi $\boxed{\overrightarrow{OB_1} = a\,\overrightarrow{OB}}$ (perché $a>0$).

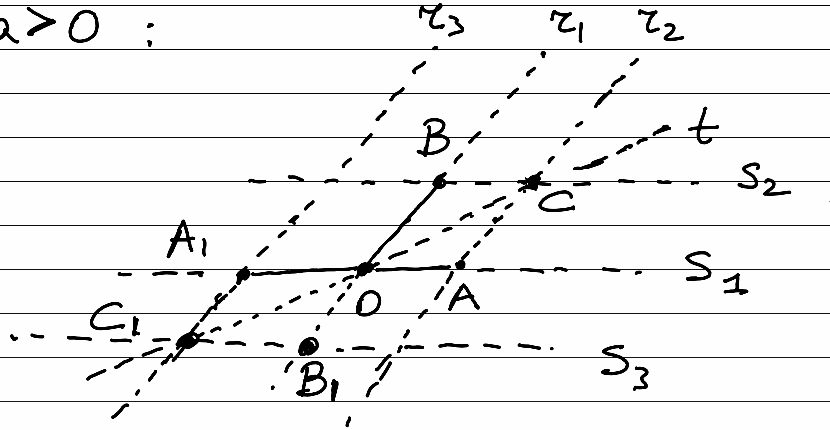
Per costruzione

$$\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OB_1} = \overrightarrow{OC_1}.$$

Quindi,

$$a\,\overrightarrow{OC} \underset{(*)}{=} \overrightarrow{OC_1} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OB_1} \underset{(**)}{=} a\,\overrightarrow{OA} + a\,\overrightarrow{OB}.$$

Caso 2) $a<0$. Stesse notazioni del caso $a>0$:



Talete $\Longrightarrow$ $\dfrac{|\overrightarrow{OC_1}|}{|\overline{OC}|} = \dfrac{|\overline{OA_1}|}{|\overline{OA}|} = |a|$

C_1 e C giacciono su semirette diverse

$\Longrightarrow$ $\boxed{\overrightarrow{OC_1} = a\,\overrightarrow{OC}}$ $(*)$

Usando s_1, s_2, s_3, t, Talete implica

$$\frac{|\overline{OB_1}|}{|\overline{OB}|} = \frac{|\overline{OC_1}|}{|\overline{OC}|} = |a|$$

Dato che B e B_1 giacciono su semirette diverse ne segue che

$\boxed{\overrightarrow{OB_1} = a\,\overrightarrow{OB}}$ $(**)$.

Adesso concludiamo come sopra ☒

Polinomi:

$$\mathbb{R}[x] = \{ a_0 + a_1 x + \dots + a_m x^m \mid m \geq 0,\ a_0, a_1, \dots, a_m \in \mathbb{R} \}$$

Il grado di

$$p(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$$

è n se $a_n \neq 0$.

$$\mathbb{R}[x]_{\leq n} = \{ a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n \mid a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R} \}$$

$=$ polinomi di grado $\leq n$.

Somma e prodotto per scalari sono definiti grado per grado. Otteniamo che $\mathbb{R}[x]$ e $\mathbb{R}[x]_{\leq m}$ sono uno spazio vettoriale.

Funzioni reali di variabile reale

Date due funzioni

$$f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

definiamo la funzione somma

$$f+g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

come

$$(f+g)(x) := f(x) + g(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Similmente, definiamo la funzione

$$af : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

prodotto per lo scalare $a \in \mathbb{R}$, come

$$(af)(x) = a f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Otteniamo così uno spazio vettoriale che denotiamo

$$\mathbb{R}^{\mathbb{R}} = \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ funzione} \}.$$

Funzioni a valori in un campo

Generalizziamo l'esempio precedente: sia X un insieme e $\mathbb{K}$ un campo.
Consideriamo l'insieme
$$\mathbb{K}^X = \{ f : X \to \mathbb{K} \}$$
delle funzioni da X a $\mathbb{K}$.
Dotiamo $\mathbb{K}^X$ delle due operazioni "puntuali":
$$(f+g)(x) := f(x)+g(x) \,, \; \forall f,g \in \mathbb{K}^X, \; \forall x \in X$$
$$(\alpha \cdot f)(x) := \alpha f(x) \,, \; \forall f \in \mathbb{K}^X, \; \forall \alpha \in \mathbb{K}.$$
Allora $(\mathbb{K}^X, +, \cdot)$ è uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$. (Esercizio).
Si noti che
$$\mathbb{K}^n \text{ "="} \; \mathbb{K}^X \quad \text{con} \quad X = [1,n] = \{1, \dots, n\}$$
e
$$\mathrm{Mat}_{m \times n}(\mathbb{K}) \text{ "="} \; \mathbb{K}^X \quad \text{con} \quad X = [1,m] \times [1,n].$$

Proprietà degli spazi vettoriali

Sia $V = (V, +, \cdot)$ uno spazio vettoriale.

·) Il vettore nullo è unico: (perché $(V, +)$ è un grp)

Se $\exists\, 0_V'$ un altro elemento neutro per $+$, oltre a 0_V, allora

$$0_V = 0_V + 0_V' = 0_V'.$$

Legge di cancellazione per la somma

Dati comunque $v, u, w \in V$ si ha

$$v + u = v + w \implies u = w$$

dim:

$$u = u + 0_V = u + (v - v) = (u + v) - v = (v + u) - v$$
$$= (v + w) - v = (w + v) - v = w + (v - v) = w + 0_V = w.$$

$\blacksquare$

•) L' opposto è unico:

Se $v+u=0_V=v+w \xRightarrow[\text{Cancellazione}]{\text{Legge di}} u=w=-v.$

•) $0v=0_V \quad \forall v\in V$

<u>dim</u>:

$$v+0v=(1+0)v=1v=v=v+0_V$$

$$\underset{\substack{\text{Legge}\\ \text{di cancellazione}}}{\Rightarrow} \quad 0v=0_V$$

•) $(-1)v=-v$

<u>dim</u>:

$$v+(-1)v=(1-1)v=0v=0_V=v-v$$

$$\Rightarrow \quad (-1)v=-v. \qquad \boxtimes$$

•) $t\,0_V=0_V \quad \forall t\in \mathbb{K}$

<u>dim</u>:

$$t\,0_V=t(0_V+0_V)\overset{(*)}{=}t\,0_V+t\,0_V$$

$$\Rightarrow 0_V=t\,0_V-t\,0_V\underset{(*)}{=}(t\,0_V+t\,0_V)-t\,0_V=t\,0_V$$

Legge di annullamento

$t v = 0_V \iff t = 0$ oppure $v = 0_V$

dim:

$\Rightarrow$) Supponiamo $tv = 0_V$. Se $t \neq 0$ allora

$$0_V = t^{-1} 0_V = t^{-1}(tv) = (t^{-1}t)v = 1v = v.$$

$\Leftarrow$) Abbiamo già dimostrato che $0v = 0_V$.
e che $t 0_V = 0_V \quad \forall t \in \mathbb{K}$

$\blacksquare$

•) $v = w \iff v - w = 0_V$

dim:

$\Rightarrow$) $v - w = w - w = 0_V$

$\Leftarrow$) $0_V = w - w = v - w$.

Oppure, $v = w \Rightarrow v - v = w - v \iff 0_V = w - v$.

Combinazioni lineari

Sia $V = (V, +, \cdot)$ un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale.
Siano $v_1, v_2, \dots, v_k$ k vettori di V.
Una combinazione lineare di $v_1, v_2, \dots, v_k$ è un vettore della forma

$$v = t_1 v_1 + t_2 v_2 + \dots + t_k v_k$$

per qualche $t_1, t_2, \dots, t_k \in \mathbb{K}$.
I numeri $t_1, t_2, \dots, t_k$ si chiamano i coefficienti della combinazione lineare.

Notazione:

$$\mathcal{L}(v_1, v_2, \dots, v_k) = \mathrm{Span}(v_1, v_2, \dots, v_k)$$

$$= \{ t_1 v_1 + t_2 v_2 + \dots + t_k v_k \mid t_1, t_2, \dots, t_k \in \mathbb{K} \}$$

Esso si chiama lo spazio delle combinazioni lineari di $v_1, v_2, \dots, v_k$.

NB:

·) $0_V \in \mathcal{L}(v_1, \dots, v_k)$. Infatti,

$$0_V = 0v_1 + 0v_2 + \dots + 0v_k.$$

·) $\mathcal{L}(0_V) = \{t0_V \mid t \in \mathbb{K}\} = \{0_V\}$.

·) $v_1, v_2, \dots, v_k \in \mathcal{L}(v_1, \dots, v_k)$. Infatti,

$$v_1 = 1v_1 + 0v_2 + 0v_3 + \dots + 0v_k$$

$$v_2 = 0v_1 + 1v_2 + 0v_3 + \dots + 0v_k$$

$$\vdots$$

$$v_i = 0v_1 + 0v_2 + \dots + 0v_{i-1} + 1v_i + 0v_{i+1} + \dots + 0v_k.$$

$(\forall i = 1, \dots, k)$.

·) $\mathrm{Span}(2v) = \mathrm{Span}(v)$. $\forall v \in V$.

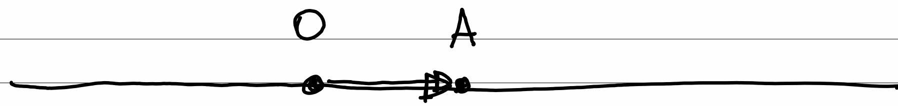
(Esercizio)

Es: ·) $v \neq 0_V \Rightarrow \mathcal{L}(v) = \{tv \mid t \in \mathbb{K}\}$

$$\neq \{v\}.$$

-) $V = \mathcal{V}_O^2$ $\quad A \neq O$

$\mathcal{L}(\overrightarrow{OA}) =$ retta per O e A:

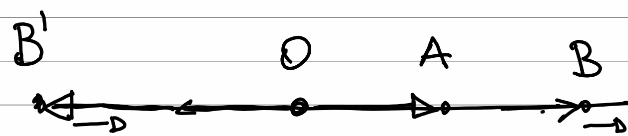


Infatti, $t\,\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB} \Longrightarrow$ B giace sulla retta per O e A. Viceversa, se B giace sulla retta per O e A allora

$$\overrightarrow{OB} = t\,\overrightarrow{OA}$$

dove

$$t = \begin{cases} \dfrac{|\overrightarrow{OB}|}{|\overrightarrow{OA}|} & \text{se B e A giacciono dalla stessa parte} \\[2ex] -\dfrac{|\overrightarrow{OB}|}{|\overrightarrow{OA}|} & \text{se B e A giacciono su semirette diverse} \end{cases}$$



$\overrightarrow{OB'} = -2\,\overrightarrow{OA}$ $\qquad$ $2\,\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB}$

Def: Sia $A \in Mat_{m\times n}(\mathbb{K})$ definiamo

$$Col(A) = \mathrm{Span}\{A^1, A^2, \dots, A^n\} \subseteq \mathbb{K}^m$$

Esso si chiama lo <u>spazio delle colonne di A</u>.

Ad esempio se $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ allora

$$Col(A) = \mathrm{Span}(A^1, A^2)$$

$$= \left\{ x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} \;\middle|\; x_1, x_2 \in \mathbb{K} \right\}.$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 \\ 3x_1 + 4x_2 \\ 5x_1 + 6x_2 \end{pmatrix} \;\middle|\; x_1, x_2 \in \mathbb{K} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^3 \;\middle|\; x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \right\}$$

Esercizio

Es (importante)

$$\mathbb{K}^n = \text{Span}\{e_1, e_2, \dots, e_n\} \text{ dove}$$

$$e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow i \quad \in \mathbb{K}^n$$

<u>dim</u>:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + x_n \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$\boxtimes$

Per $n=2$:

$$\mathbb{K}^2 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \middle| x_1, x_2 \in \mathbb{K} \right\} = \left\{ x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| x_1, x_2 \in \mathbb{K} \right\}$$

Per $n=3$:

$$\mathbb{K}^3 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \middle| x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{K} \right\} = \left\{ x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{K} \right\}$$

Sottospazi Vettoriali

Sia V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale.
Un sottoinsieme $U \subseteq V$ si dice un <u>sottospazio vettoriale</u> se

(0) $0_V \in U$

(1) $u_1 + u_2 \in U \quad \forall u_1, u_2 \in U$

(2) $tu \in U \quad \forall t \in \mathbb{K} \quad \forall u \in U$

<u>NB</u>: ·) Se U è non-vuoto, (2) $\Rightarrow$ (0).
Quindi (0) può essere riformulato da
(0') U è non vuoto $(U \neq \emptyset)$.

·) (1), (2) $\Leftrightarrow$
(3) $\alpha u_1 + \beta u_2 \in U \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \forall u_1, u_2 \in U$.

Per verificare che un sottoinsieme U di V sia un sottospazio:

(I) $U \neq \phi$

(II) $\alpha u_1 + \beta u_2 \in U$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$ $\forall u_1, u_2 \in U$.

Es: ·) $\{0_V\}$ è un sottospazio vettoriale di V che si chiama SOTTOSPAZIO NULLO

·) V è un sottospazio vettoriale di V,

$\{0\}$ e V si dicono sottospazi banali.

·) $v \neq 0_V$. $\mathrm{Span}\{v\} = \{tv \mid t \in \mathbb{K}\}$ è un sottospazio vettoriale:

(I) $v = 1v \in \mathrm{Span}\{v\} \neq \phi$

(II) $\alpha(tv) + \beta(sv) = (\alpha t + \beta s)v \in \mathrm{Span}\{v\}$ $\forall \alpha, \beta, t, s \in \mathbb{K}$

PROP: $U, W \subset V$ sottospazi vettoriali
$\Rightarrow U \cap W$ è un sottospazio vettoriale.

dim: $0_V \in U$, $0_V \in W \Rightarrow 0_V \in U \cap W$.

Siano $u_1, u_2 \in U \cap W$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$.

Allora $u_1, u_2 \in U$ e $u_1, u_2 \in W$.

$\alpha u_1 + \beta u_2 \in U$ (perché U è un sottospazio)

$\alpha u_1 + \beta u_2 \in W$ (perché W è un sottospazio)

$\Rightarrow \alpha u_1 + \beta u_2 \in U \cap W$ $\blacksquare$

TEOREMA:

1) Dati $v_1, \dots, v_K \in V$
$\mathcal{L}(v_1, \dots, v_K)$ è un sottospazio vettoriale.

2) $\mathcal{L}(v_1, \dots, v_K) = \bigcap \{ U \text{ s.sp. di } V \mid v_i \in U \ \forall i \}$
è il più piccolo sottospazio vettoriale di V contenente $v_1, \dots, v_K$.

dim:

1) $v_1, \dots, v_K \in \mathcal{L}(v_1, \dots, v_K)$ che quindi è non-vuoto.

Dati $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ e $u, w \in \mathcal{L}(v_1, \dots, v_K)$

facciamo vedere che

$$\alpha u + \beta w \in \mathcal{L}(v_1, \dots, v_K).$$

Per definizione, $\exists\, t_1, \dots, t_K, s_1, \dots, s_K \in \mathbb{K}$ t.c.

$$u = t_1 v_1 + \dots + t_K v_K, \quad w = s_1 v_1 + \dots + s_K v_K.$$

Allora,

$$\begin{aligned} \alpha u + \beta w &= \alpha(t_1 v_1 + \dots + t_K v_K) + \beta(s_1 v_1 + \dots + s_K v_K) \\ &= (\alpha t_1 + \beta s_1) v_1 + \dots + (\alpha t_K + \beta s_K) v_K \\ &\in \mathcal{L}(v_1, \dots, v_K). \end{aligned}$$

2) Sia $U \subseteq V$ s.sp. vettoriale t.c. $v_1, \dots, v_K \in U$.

Allora $t_1 v_1 + \dots + t_K v_K \in U \quad \forall t_1, \dots, t_K \in \mathbb{K}$.

Quindi $\mathcal{L}(v_1, \dots, v_K) \subseteq U$.

$\blacksquare$

<u>Def</u>: Il sottospazio vettoriale

$$\bigcap \{ U \text{ s.sp. di } V \mid v_1, \dots, v_k \in U \}$$

si chiama <u>sottospazio generato da $v_1, \dots, v_k$</u>
e si denota con $\langle v_1, \dots, v_k \rangle$.

Il Teorema dice che

$$\langle v_1, \dots, v_k \rangle = \mathcal{L}(v_1, \dots, v_k) = \mathrm{Span}(v_1, \dots, v_k)$$

<u>Notazione</u>: Dato un insieme $\mathcal{I} = \{v_1, \dots, v_k\}$ di vettori di V denotiamo

$$\mathcal{L}(\mathcal{I}) = \mathrm{Span}(\mathcal{I}) := \mathrm{Span}(v_1, \dots, v_k)$$

$$\langle \mathcal{I} \rangle := \langle v_1, \dots, v_k \rangle$$

Es: a) $\mathbb{R}[x]_{\leq n} = \langle 1, x, \dots, x^n \rangle$.

I generatori $\{1, x, \dots, x^n\}$ di $\mathbb{R}[x]_{\leq n}$ si chiamano <u>generatori standard</u>.

b) $\mathbb{K}^n = \langle e_1, \dots, e_n \rangle$ dove $e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \\ \\ \\ \leftarrow i \\ \\ \\ \\ \end{array}$

I generatori $\{e_1, \dots, e_n\}$ si chiamano <u>generatori standard</u> di $\mathbb{K}^n$

Si chiamano "standard" perché la uguaglianza in a) e b) è fondamentalmente la definizione dei due spazi vettoriali.

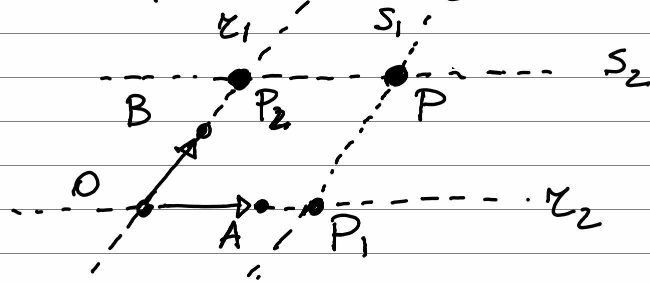
V_O^2 non ha generatori "standard".

Es: Siano $A, B \in \mathcal{E}^2$ t.c. $A \neq O$, $B \neq O$ ed i punti O, A e B non sono allineati. Allora
$$V_O^2 = \mathrm{Span}(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}).$$

Sol.: Facciamo vedere che $\forall P \neq O$ $\exists\, t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ t.c. $\overrightarrow{OP} = t_1 \overrightarrow{OA} + t_2 \overrightarrow{OB}$.

Poniamo:
- r_1 = retta per O e B
- r_2 = retta per O e A
- s_1 = retta per P parallela a r_1
- s_2 = retta per P parallele a r_2.
- $P_1 = s_1 \cap r_2$ • $P_2 = s_2 \cap r_1$.

Per costruzione
$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{OP_2}$$
ed esistono $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ (quali?) t.c.
$$\overrightarrow{OP_1} = t_1 \overrightarrow{OA_1} \qquad \overrightarrow{OP_2} = t_2 \overrightarrow{OB}$$



☒

Lemma di scambio

Sia $\mathcal{T} = \{v_1, \dots, v_K\}$ e sia $U = \langle \mathcal{T} \rangle$.

Sia

$$0_V \neq u = t_1 v_1 + \dots + t_K v_K \in U. \quad (*)$$

Allora se $t_i \neq 0$ si ha

$$U = \langle \mathcal{T} \setminus \{v_i\} \cup \{u\} \rangle$$

("Possiamo scambiare il generatore v_i di U con u a patto che $t_i \neq 0$")

dim: Da $(*)$ segue che

$$v_i = \frac{1}{t_i} u - \frac{t_1}{t_i} v_1 - \dots - \frac{t_{i-1}}{t_i} v_{i-1} - \frac{t_{i+1}}{t_i} v_{i+1} - \dots - \frac{t_K}{t_i} v_K$$

Quindi, $v_i \in \langle \mathcal{T} \setminus \{v_i\} \cup \{u\} \rangle$. Ma anche $v_j \in \langle \mathcal{T} \setminus \{v_i\} \cup \{u\} \rangle \quad \forall j \neq i$. Quindi $v_1, \dots, v_K \in \langle \mathcal{T} \setminus \{v_i\} \cup \{u\} \rangle$. Dato che U è il più piccolo sottospazio contenente $v_1, \dots, v_K$, segue che

$$U \subseteq \langle \mathcal{T} \setminus \{v_i\} \cup \{u\} \rangle \subseteq U. \quad \blacksquare$$

__Es__: Dimostrare che $\mathbb{R}^2 = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$.

__Sol.__: Poiché $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x e_1 + x e_2$, $\mathbb{R}^2 = \langle e_1, e_2 \rangle$ dove $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Poniamo $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ e $v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$. Allora $\boxed{v_1 = 1 e_1 + 2 e_2}$. Poiché il coefficiente di e_1 è diverso da zero, dal lemma di scambio otteniamo $\mathbb{R}^2 = \langle v_1, e_2 \rangle$.

Scriviamo $\boxed{v_2 = t_1 v_1 + t_2 e_2}$. Poiché $v_2 \notin \langle v_1 \rangle$, segue che $t_2 \neq 0$ e quindi, per il lemma di scambio, otteniamo

$$\mathbb{R}^2 = \langle v_1, v_2 \rangle. \qquad \blacksquare$$

Es (Lemma di Scambio): Dimostrare che $\mathbb{R}[x]_{\leq 2} = \langle 1-x, 1+x, 2-x+x^2 \rangle$

dim: Sappiamo che $\mathbb{R}[x]_{\leq 2} = \langle 1, x, x^2 \rangle$

Applichiamo ripetutamente il lemma di scambio. Poniamo:

$u_1 := 1-x$, $u_2 := 1+x$, $u_3 := 2-x+x^2$.

Poiché $u_1 = 1-x$, per il lemma di scambio

$$\mathbb{R}[x]_{\leq 2} = \langle u_1, x, x^2 \rangle.$$

In particolare $\exists\, t_1, t_2, t_3$ t.c. $u_2 = t_1 u_1 + t_2 x + t_3 x^2$.

Poiché $u_2 \notin \langle u_1 \rangle$ ed ha grado 1, concludiamo che $t_2 \neq 0$ e $t_3 = 0$. Quindi, per il lemma di scambio

$$\mathbb{R}[x]_{\leq 2} = \langle u_1, u_2, x^2 \rangle.$$

Quindi $\exists\, s_1, s_2, s_3 \in \mathbb{R}$ t.c. $u_3 = s_1 u_1 + s_2 u_2 + s_3 x^2$.

Poiché il $gr(u_3) = 2 > gr(u_1) = gr(u_2) = 1$ si ha che $s_3 \neq 0$. Quindi, per il lemma di scambio $\mathbb{R}[x]_{\leq 2} = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle$. $\boxtimes$

Dipendenza/Indipendenza lineare

Cominciamo lo studio della dipendenza lineare con una semplice osservazione.

OSSERVAZIONE FONDAMENTALE

$$v_K \in \langle v_1, \dots, v_{K-1} \rangle \iff$$

$$\exists\ t_1, \dots, t_K \in \mathbb{K},\ t_K \neq 0 \text{ t.c.}$$

$$\boxed{t_1 v_1 + \dots + t_K v_K = 0_V}$$

dim:

$\Rightarrow$) Se $v_K \in \mathcal{L}(v_1, \dots, v_{K-1})$ allora $\exists$ $t_1, \dots, t_{K-1} \in \mathbb{K}$ t.c.

$$t_1 v_1 + t_2 v_2 + \dots + t_{K-1} v_{K-1} = v_K$$

$$\iff t_1 v_1 + t_2 v_2 + \dots + t_{K-1} v_{K-1} - v_K = 0_V$$

Basta allora porre $t_K = -1$.

$\Leftarrow$) Da $(*)$:

$$t_K v_K = -t_1 v_1 - t_2 v_2 - \dots - t_{K-1} v_{K-1}$$

$$\underset{t_K \neq 0}{\Rightarrow} v_K = -\frac{t_1}{t_K} v_1 - \frac{t_2}{t_K} v_2 - \dots - \frac{t_{K-1}}{t_K} v_{K-1}.$$

$$\in \mathcal{L}(v_1, \dots, v_{K-1}).$$ ☒

Definizione

Diciamo che k vettori $v_1, \dots, v_k \in V$ sono linearmente dipendenti se $\exists\, t_1, \dots, t_k \in \mathbb{R}$ non tutti nulli t.c.

$$\boxed{t_1 v_1 + t_2 v_2 + \dots + t_k v_k = 0_V.} \quad (*)$$

Diciamo anche che l'insieme

$$\{v_1, \dots, v_k\}$$

è linearmente dipendente.

L'equazione vettoriale $(*)$ si chiama una relazione di dipendenza lineare.

Es: L'insieme $\{0_V\}$ è lin. Dip.. Infatti, $1 \cdot 0_V = 0_V$ è una rel. di dip. lin. non banale.

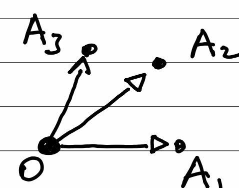
Es: $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ sono linearmente Dipendenti.

Infatti, $-5v_1 + v_2 + v_3 = 0_{\mathbb{R}^2}$.

Es: $V = \mathbb{R}[X]_{\leq 2} = \{a_0 + a_1 X + a_2 X^2 \mid a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$,

$v_1 = 1 - X$, $v_2 = 2X + X^2$, $v_3 = 1 + X + X^2$ sono lin. Dipendenti.

Infatti, $v_1 + v_2 - v_3 = 0_V$.



Es: I vettori geometrici sono lin. Dip. Infatti, sappiamo che $\exists\ t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ t.c.

$$\vec{OA_3} = t_1 \vec{OA_1} + t_2 \vec{OA_2}.$$

$$\Rightarrow \quad t_1 \vec{OA_1} + t_2 \vec{OA_2} - \vec{OA_3} = \vec{OO}.$$

Definizione

$v_1, \dots, v_K$ sono LIN. INDIPENDENTI se non sono linearmente dipendenti, ovvero se l'unica relazione di dipendenza lineare tra di essi è triviale:

$$t_1 v_1 + \dots + t_K v_K = 0_V \implies t_1 = t_2 = \dots = t_K = 0$$

Diciamo anche che l'insieme $\{v_1, \dots, v_K\}$ è linearmente INdipendente.

Es: Sia $v \neq 0_V$. Allora $\{v\}$ è lin. Ind.

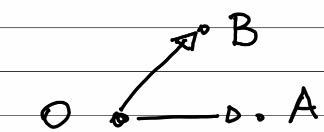
Infatti, $tv = 0_V \underset{\text{Legge di annullamento}}{\Longrightarrow} t = 0$.

Es: $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$ è lin. Ind..

$$t_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{cases} t_1 + 2t_2 = 0 \\ 2t_1 + 3t_2 = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow t_1 = -2t_2 \Rightarrow -4t_2 + 3t_2 = 0 \Rightarrow t_2 = 0 \Rightarrow t_1 = 0$.

Es: Siano $A \neq O \neq B \in \mathcal{E}^2$ non allineati.



Allora $\vec{OA}$ e $\vec{OB}$ sono lin. Ind.

Infatti, $t_1 \vec{OA} + t_2 \vec{OB} = \vec{OO}$

$\Rightarrow t_1 \vec{OA} = -t_2 \vec{OB}$. Se $t_1 \neq 0$, allora

$\vec{OA} = \lambda \vec{OB}$ per $\lambda = -\frac{t_2}{t_1} \neq 0$. Quindi

$\lambda \vec{OB} = \vec{OC}$ e C giace sia sull'asse OA

che sull'asse OB. Quindi $C = O \Rightarrow \lambda = 0$.

Similmente se $t_2 \neq 0$.

Es: $V = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. $v_1 = e^x$, $v_2 = e^{2x}$. Allora $\{v_1, v_2\}$ è lin. Ind.. Infatti

$$t_1 e^x + t_2 e^{2x} = 0_V$$

vuol dire

$$t e^x + t_2 e^{2x} = 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

In particolare, per $x=0$ e $x=1$, otteniamo

$$\begin{cases} t_1 + t_2 = 0 \\ t_1 e + t_2 e^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 + t_2 = 0 \\ t_1 + t_2 e = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_2 = -t_1 \\ (1-e) t_1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 = 0 \\ t_2 = 0 \end{cases}$$

Es: I generatori standard $1, x, \dots, x^n$ di $\mathbb{K}[x]_{\leq n}$ ed i generatori standard $e_1, \dots, e_n$ di $\mathbb{K}^n$ sono linearmente indipendenti.

Infatti, per definizione di polinomi uguali:

$$0 + 0x + \dots + 0x^n = 0_{\mathbb{K}[x]_{\leq n}} = t_1 1 + t_2 x + \dots + t_{n+1} x^n \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 = 0 \\ \vdots \\ t_{n+1} = 0 \end{cases}$$

per definizione di matrici uguali:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = 0_{\mathbb{R}^n} = t_1 e_1 + \dots + t_n e_n = \begin{pmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_n \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 = 0 \\ \vdots \\ t_n = 0 \end{cases}$$

Lemma di Dipendenza Lineare

$\mathcal{T} = \{v_1, \dots, v_K\}$ é linearmente Dipendente se e solo se $\exists$ indice i t.c. $v_i \in \langle \mathcal{T} \setminus \{v_i\} \rangle$ se e solo se $\exists$ indice i t.c. $\langle \mathcal{T} \rangle = \langle \mathcal{T} \setminus \{v_i\} \rangle$

dim:

•) Se $\mathcal{T}$ ē lin. dip. esiste una relazione di dipendenza lineare

$$t_1 v_1 + \dots + t_K v_K = 0_K \ .$$

in cui non tutti i coefficienti sono nulli. Sia i un indice t.c. $t_i \neq 0$. Allora

$$v_i = - \sum_{j \neq i} \frac{t_j}{t_i} v_j \in \langle \mathcal{T} \setminus \{v_i\} \rangle.$$

•) Se $v_i = \sum_{j \neq i} t_j v_j$ allora

$$\sum_{j \neq i} t_j v_j - v_i = 0_V$$

ē una relazione di dipendenza lineare.

$\blacksquare$

Lemma di Indipendenza Lineare

Sia $\mathcal{T}=\{v_1,\dots,v_{K-1}\}$ lin. Ind. Allora $\{v_1,\dots,v_{K-1},v_K\}$ è lin Ind. $\Leftrightarrow$ $v_K \notin \langle \mathcal{T} \rangle$.

"Possiamo creare nuovi insiemi lin. Ind. da $\mathcal{T}$, aggiungendo un vettore che non appartiene a $\langle \mathcal{T} \rangle$".

dim:

Se $v_K \in \langle \mathcal{T} \rangle$ allora $\{v_1,\dots,v_K\}$ è lin. DIP. per il lemma di dipendenza lineare.

Se $v_K \notin \langle \mathcal{T} \rangle$ allora data un'eq. vettoriale

$$t_1 v_1 + \dots + t_{K-1} v_{K-1} + t_K v_K = 0_V \quad (*)$$

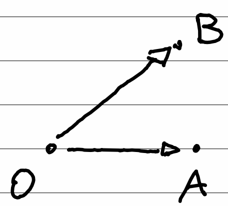
$t_K = 0$ per l'OSS. FOND. Ma allora $(*)$ diventa

$$t_1 v_1 + \dots + t_{K-1} v_{K-1} = 0_V$$

che implica $t_1 = t_2 = \dots = t_{K-1} = 0$, poiché $\{v_1,\dots,v_{K-1}\}$ è lin. Ind.

$\boxtimes$

Es: $V = V_0^2$ $A \in \mathcal{E}^2$, $A \neq O$. Allora $v = \overrightarrow{OA}$ è lin. Ind.. Il lemma di indipendenza lineare dice che un vettore $w = \overrightarrow{OB}$ forma con v un insieme lin. Ind. se e solo se $w \notin \langle \overrightarrow{OA} \rangle$ se e solo se B non giace sulla retta per O e A.



sono lin. Ind.

Es: Polinomi di gradi distinti sono lin. Ind.

Infatti, osserviamo che se

$$p(x) = t_1 p_1(x) + t_2 p_2(x)$$

allora se $(t_1, t_2) = (0,0)$, $p(x) = 0$

se $(t_1, t_2) \neq (0,0)$ allora

$$gr(p) \in \{gr(p_1), gr(p_2)\}.$$ In particolare

Se $p_1(x), \dots, p_n(x)$ hanno gradi distinti, allora $p_i(x) \notin \langle p_j(x) \mid j \neq i \rangle$.

Es (Soluzioni-base di sistemi ridotti):

Un sistema lineare in n variabili $x_1, \dots, x_n$ si dice ridotto se alcune variabili $x_{i_1}, \dots, x_{i_k}$ sono espresse come combinazione lineare delle altre $(n-k)$ variabili.

$x_{i_1}, \dots, x_{i_k}$ = variabili dipendenti o dominanti

$\{x_j \mid j \neq i_1, \dots, i_k\}$ = variabili indipendenti o libere

Poniamo $I = \{i_1, \dots, i_k\} \subset [1,n] = \{1, 2, \dots, n\}$

Il sistema si presenta nella forma

$$\begin{cases} x_{i_1} = \sum_{j \in [1,n] \setminus I} s_{i_1 j} x_j \\ x_{i_2} = \sum_{j \in [1,n] \setminus I} s_{i_2 j} x_j \\ \vdots \\ x_{i_k} = \sum_{j \in [1,n] \setminus I} s_{i_k j} x_j \end{cases}$$

$\forall j \in [1,n] \setminus I$ consideriamo la soluzione v_j ottenuta ponendo $x_j = 1$ e $x_\ell = 0$ $\forall \ell \in [1,n] \setminus I$. Queste $n-k$ soluzioni

$v_1, \dots, v_k$ si dicono le <u>soluzioni - base</u> del sistema. Dal lemma di indipendenza lineare segue che $v_1, \dots, v_k$ sono linearmente indipendenti.

Facciamo un esempio numerico:

$$U: \begin{cases} x_1 = x_3 + 2x_4 + 3x_5 \\ x_2 = -x_3 - 3x_4 + 4x_5 \end{cases}$$

Allora

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} x_3 + 2x_4 + 3x_5 \\ -x_3 - 3x_4 + 4x_5 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \middle| \, x_3, x_4, x_5 \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_5 \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \, x_3, x_4, x_5 \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \langle \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{= v_3}, \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{= v_4}, \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{= v_5} \rangle$$

Soluzioni - base

$v_3 \neq 0$, $v_4 \notin \langle v_3 \rangle$, $v_5 \notin \langle v_3, v_4 \rangle$

$\Rightarrow \{v_3, v_4, v_5\}$ è lin. ind.

Osservazione

Se $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ è lin. Ind., allora ogni sottoinsieme non vuoto di $\mathcal{B}$ è lin. Ind.

"Essere lin. Ind. è chiuso per sottoinsiemi"

Osservazione:

Sia $\mathcal{T} = \{v_1, \dots, v_k\}$ un insieme di generatori per $U = \operatorname{Span}(\mathcal{T})$. Sia $\mathcal{S} = \{v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_n\} \subset U$ un insieme che contiene $\mathcal{T}$. Allora

$$U = \operatorname{Span}(\mathcal{T}) = \operatorname{Span}(\mathcal{S}).$$

"Essere generatori è chiuso per sopra-insiemi".

TEOREMA FONDAMENTALE SULL' IND. LIN.

Sia $\mathcal{T} = \{v_1, \dots, v_K\} \subset V$ e sia $U = \langle \mathcal{T} \rangle$. Sia

$$\mathcal{B} = \{z_1, \dots, z_n\} \subset U$$

un insieme lin. IND. di vettori di U.

Allora $n = |\mathcal{B}| \leq K = |\mathcal{T}|$ ed esistono indici distinti $i_1, \dots, i_n$ t.c.

$$U = \langle \mathcal{T} \setminus \{v_{i_1}, \dots, v_{i_n}\} \cup \{z_1, \dots, z_n\} \rangle.$$

<u>dim</u>: Supponiamo, per arrivare ad una contraddizione, che $n > K$.

Siccome $z_1 \in U$ $\exists\, t_1, \dots, t_K \in \mathbb{R}$ t.c.

$$z_1 = t_1 v_1 + \dots + t_K v_K.$$

Siccome $\{z_1\}$ è lin. indip., $z_1 \neq 0_V$. Quindi $\exists$ un indice i_1 t.c. $t_{i_1} \neq 0$. Per il lemma di scambio

$$U = \langle \mathcal{T} \setminus \{v_{t_1}\} \cup \{z_1\} \rangle.$$

Poniamo

$$\mathcal{T}_1 = \mathcal{T} \setminus \{v_{i_1}\} \cup \{z_1\}.$$

Poiché $z_2 \in U = \langle \mathcal{T}_1 \rangle$, $\exists\, t_1, \dots, t_k \in \mathbb{R}$ t.c.

$$z_2 = t_1 v_1 + \dots + t_{i_1} z_1 + \dots + t_k v_k$$

Se $t_j = 0$ $\forall j \neq i_1$ si avrebbe $z_2 = t_{i_1} z_1$.
Ma questo contraddirrebbe il fatto che $\{z_1, z_2\}$ è lin. Ind. Quindi, $\exists$ un indice $i_2 \neq i_1$ t.c. $t_{i_2} \neq 0$.
Per il lemma di scambio

$$U = \langle \mathcal{T}_1 \setminus \{v_{i_2}\} \cup \{z_2\} \rangle$$

$$= \langle \mathcal{T} \setminus \{v_{i_1}, v_{i_2}\} \cup \{z_1, z_2\} \rangle$$

Poniamo

$$\mathcal{T}_2 = \mathcal{T}_1 \setminus \{v_{i_2}\} \cup \{z_2\}.$$

Procedendo in questo modo, se $k \leq n$, al k-esimo passo otteniamo

$$U = \langle \mathcal{T} \setminus \{v_1, \dots, v_k\} \cup \{z_1, \dots, z_k\} \rangle = \langle z_1, \dots, z_k \rangle.$$

Se $K \underset{+}{\leq} n$ si avrebbe

$$z_{K+1} \in \langle z_1, \dots, z_K \rangle.$$

Questo contraddice il fatto che

$$\{z_1, \dots, z_{K+1}\}$$

è lin. Ind.. La contraddizione è nata dall'ipotesi $K < n$. Quindi $K \geq n$, ed il teorema è dimostrato $\blacksquare$

Es:

$$U = \langle v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} \rangle \subseteq \mathbb{R}^4$$

$$\mathcal{B} = \left\{ z_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, z_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \right\}.$$

Poiché $z_2 \notin \langle z_1 \rangle$, segue che $\mathcal{B}$ è linearmente indipendente.

$$z_1 = v_2 - v_3 \quad , \quad z_2 = v_4 - 2v_3$$

Per il Teorema fondamentale:

$$U = \langle v_1, z_1, v_3, z_2 \rangle = \langle v_1, v_2, z_1, z_2 \rangle$$

$\blacksquare$

COR: $V = \langle v_1, \dots, v_K \rangle$

$\mathcal{I} = \{ z_1, \dots, z_\ell \} \subset V$.

Se $\ell > K$ allora $\mathcal{I}$ è lin. DIP.

dim: Se $\mathcal{I}$ fosse linearmente indipendente allora, per il Teorema fondamentale sull'ind. Lin., $\ell \leq K$. $\blacksquare$

Es: ·) $V = \mathbb{R}^2 = \langle e_1, e_2 \rangle$.

$\mathcal{I} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$

$\Rightarrow \mathcal{I}$ è lin. Dip.

·) $V = \mathbb{R}^n$, $\mathcal{I} = \{ z_1, \dots, z_{n+1} \}$

$\Rightarrow \mathcal{I}$ è lin. Dip.

·) $V = \mathbb{R}[x]_{\leq n}$, $\mathcal{I} = \{ p_1(x), \dots, p_{n+2}(x) \}$

$\Rightarrow \mathcal{I}$ è lin. Dip.

Cor: Siano $\mathcal{B}_1 = \{v_1, \dots, v_n\}$ e $\mathcal{B}_2 = \{w_1, \dots, w_m\}$ due insiemi linearmente Indipendenti di V.

Se

$$V = \langle \mathcal{B}_1 \rangle = \langle \mathcal{B}_2 \rangle$$

allora $n = m$.

dim:

Applicando il teorema fondamentale a $\mathcal{I} = \mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B} = \mathcal{B}_2$ otteniamo

$$n = |\mathcal{B}_1| = |\mathcal{I}| \geq |\mathcal{B}| = |\mathcal{B}_2| = m.$$

Applicando il Teorema fondamentale a $\mathcal{I} = \mathcal{B}_2$ e $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1$ otteniamo

$$m = |\mathcal{B}_2| = |\mathcal{I}| \geq |\mathcal{B}| = |\mathcal{B}_1| = n$$

Quindi $m \geq n \geq m \Rightarrow m = n$.

$\boxtimes$

Def: Una **base** di V è un insieme **finito** $\mathcal{B}=\{v_1,\dots,v_n\}$ di vettori di V tali che

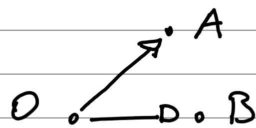
(B1) $\mathcal{B}$ genera V, i.e. $V=\langle\mathcal{B}\rangle$

(B2) $\mathcal{B}$ è lin. Ind..

Es: ·) $\{e_1,\dots,e_n\}$ è una base di $\mathbb{R}^n$ che si chiama la **base standard** di $\mathbb{R}^n$

·) $\{1,x,\dots,x^n\}$ è una base di $\mathbb{R}[x]_{\le n}$ che si chiama la **base standard** di $\mathbb{R}[x]_{\le n}$.

·) Dati $A\neq O\neq B\in\mathcal{E}^2$ non allineati



$\mathcal{B}=\{\vec{OA},\vec{OB}\}$ è una base di $\mathcal{V}_O^2$.

COR (Riformulazione):
Tutte le basi di V hanno la stessa cardinalità.

Def: La dimensione di V è la cardinalità di una sua base e si denota con $\dim_{\mathbb{K}} V$ oppure più semplicemente con $\dim V$ (se il campo è chiaro)

Es: ·) $\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K}^n = n$

·) $\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K}[x]_{\leq n} = n+1$

·) $\dim \mathcal{V}_O^2 = 2$

·) $\dim \{0_V\} =: 0$ (convenzione)

·) $\mathbb{C}$ è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$.
Una sua base è $\{1, i\}$ per cui $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2$.
D'altronde, $\mathbb{C} = \langle 1 \rangle$ come $\mathbb{C}$-spazio vettoriale, per cui $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C} = 1$.

Non tutti gli spazi vettoriali ammettono una base:

$V = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, $\forall n \geq 1$ l'insieme
$$\{e^{x}, e^{2x}, e^{3x}, \dots, e^{nx}\}$$
è lin. Indipendente.

Ne segue che V non ammette un insieme <u>finito</u> di generatori.

In questo caso si dice che lo spazio vettoriale ha "dimensione infinita".

C'è però un'ampia classe di spazi vettoriali che ammettono una base:

Def: Uno spazio vettoriale non-nullo V si dice <u>finitamente generato</u> se $\exists\, v_1, \dots, v_k \in V$ tali che $V = \langle v_1, \dots, v_k \rangle$.

<u>TEOREMA</u>

Uno sp. vett. fin. gen. ammette una base.

<u>dim</u>: <u>Algoritmo di generazione di basi</u>

Input: $\{z_1, \dots, z_i\}$ lin. Ind.

$$
\begin{array}{ccc}
 & \{z_1,\dots,z_i\} \text{ lin. Ind.} & \\
\swarrow & & \searrow \\
\langle z_1,\dots,z_i\rangle = V & & \langle z_1,\dots,z_i\rangle \neq V \\
\downarrow & & \downarrow \\
\{z_1,\dots,z_i\} \text{ è una base di } V & & \exists\, z_{i+1} \notin \langle z_1,\dots,z_i\rangle \\
\downarrow & & \downarrow \text{ Lemma di Indip. Lineare} \\
\boxed{\text{STOP}} & & \{z_1,\dots,z_{i+1}\} \text{ è Lin. Ind.} \\
 & & \downarrow \\
 & & \text{Ricomincio.}
\end{array}
$$

Applicare l'algoritmo a $\{z_1\} \neq \{0_V\}$.

L'algoritmo termina perché V è fin. gen. e quindi non possono esserci più di un numero finito di vettori lin. indip..

$\boxtimes$

<u>Es</u>: Trovare una base di $\mathcal{V}_0^2$.

<u>Sol.</u>: Scegliamo un punto $A \neq O$.

$\{\overrightarrow{OA}\}$ è lin. ind.

$\langle \overrightarrow{OA} \rangle =$ "retta per O e A" $\neq \mathcal{V}_0^2$.

Scegliamo un punto B che non giace sulla retta per O e A.

$\Rightarrow \{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\}$ è lin. indip. e genera $\mathcal{V}_0^2$ (l'abbiamo visto la volta scorsa).

$\boxtimes$

Es: $V_0^3 = \{ \overrightarrow{OP} \mid P \in \mathcal{E}^3 \}$: vettori geometrici dello spazio. V_0^3 ha una struttura di spazio vettoriale definita esattamente come quella di V_0^2.

Cerchiamo una base:

Scegliamo un punto $A_1 \neq O$.

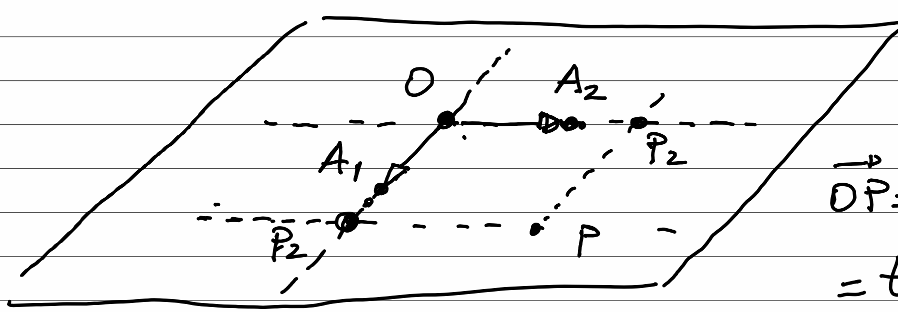
$$\langle \overrightarrow{OA_1} \rangle \text{ "=" retta per } O \text{ e } A_1 \text{ "}\neq\text{" } V_0^3$$

$$r_{OA_1} = \text{retta per } O \text{ e } A_1.$$

Scegliamo $A_2 \in \mathcal{E}^3$, $A_2 \notin r_{OA_1}$

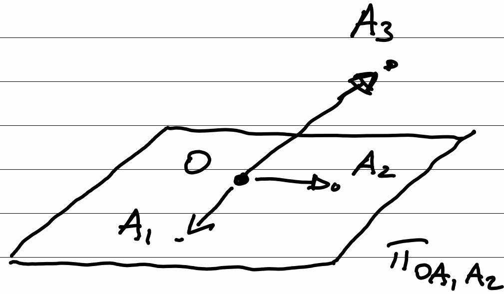
$$\langle \overrightarrow{OA_1}, \overrightarrow{OA_2} \rangle \text{ "=" piano per } O, A_1 \text{ e } A_2 \text{ "}\neq\text{" } V_0^3$$

$$\pi_{OA_1A_2} = \text{piano per } O, A_1 \text{ e } A_2$$



$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{OP_2}$$
$$= t_1 \overrightarrow{OA_1} + t_2 \overrightarrow{OA_2}$$

Scegliamo $A_3 \in \mathcal{E}^3$, $A_3 \notin \pi_{OA_1A_2}$



$\Rightarrow \{\overrightarrow{OA_1}, \overrightarrow{OA_2}, \overrightarrow{OA_3}\}$ è lin. indip.

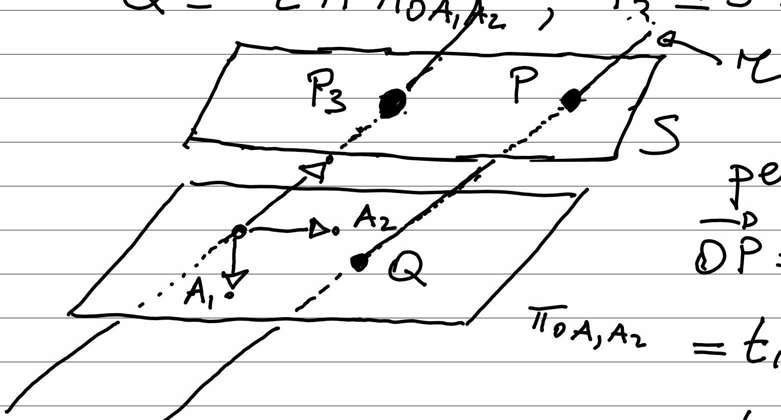
Vediamo che genera $\mathcal{V}_O^3$:

Sia $P \in \mathcal{E}^3$, $P \neq O$.

r = retta per P parallela a r_{OA_3}

S = piano per P parallelo a $\pi_{OA_1A_2}$

$Q = r \cap \pi_{OA_1A_2}$, $P_3 = S \cap r_{OA_3}$



per costruzione:

$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OP_3}$

$= t_1 \overrightarrow{OA_1} + t_2 \overrightarrow{OA_2}$

$+ t_3 \overrightarrow{OA_3}$. $\blacksquare$

A cosa serve una base?

Ad avere <u>coordinate</u>.

<u>Prop.</u> (Importante):

Sia $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\} \subset V$ lin. Ind..

Sia $v \in \langle \mathcal{B} \rangle$. Allora i coefficienti di v nella sua scrittura come combinazione lineare di $v_1, \dots, v_n$ sono <u>unici</u>.

<u>dim</u>: Se

$$v = x_1 v_1 + \dots + x_n v_n = y_1 v_1 + \dots + y_n v_n$$

allora

$$(x_1 - y_1) v_1 + (x_2 - y_2) v_2 + \dots + (x_n - y_n) v_n = 0_V$$

$$\underset{\substack{\mathcal{B} \text{ è} \\ \text{Lin.} \\ \text{Ind.}}}{\Longrightarrow} \quad x_1 - y_1 = 0, \; x_2 - y_2 = 0, \dots, x_n - y_n = 0$$

ovvero $x_i = y_i \quad \forall i = 1, \dots, n$.

$\boxtimes$

Se $\mathcal{B}$ è un base di V allora $V = \langle \mathcal{B} \rangle$ e quindi ogni vettore di v è combinazione lineare degli elementi di $\mathcal{B}$ e per la proposizione i suoi coefficienti sono unici.

Def: Sia $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base di V. Le coordinate di un vettore $v \in V$ nella base $\mathcal{B}$ sono gli unici numeri $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{K}$ t.c.

$$v = x_1 v_1 + x_2 v_2 + \dots + x_n v_n .$$

Le coordinate di v formano quindi un vettore $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ di $\mathbb{K}^n$.

Abbiamo quindi una funzione:

$$F_{\mathcal{B}} : V \longrightarrow \mathbb{K}^n$$
$$v \longmapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} : \ v = x_1 v_1 + \dots + x_n v_n$$

che si chiama "<u>funzione coordinate nella base $\mathcal{B}$</u>".

<u>OSS</u>: $F_{\mathcal{B}}$ dipende dalla scelta di una <u>base</u> $\mathcal{B}$ di V.

<u>Prop.</u>: La funzione $F_{\mathcal{B}}$ è biiettiva (ovvero è iniettiva e suriettiva)

<u>dim</u>: 1) $F_{\mathcal{B}}$ è iniettiva:

$$F_{\mathcal{B}}(v) = F_{\mathcal{B}}(w) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$
$$\Rightarrow v = x_1 v_1 + \dots + x_n v_n = w.$$

2) $F_{\mathcal{B}}$ è suriettiva:

Dato comunque $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$,

$$X = F_{\mathcal{B}}(x_1 v_1 + \dots + x_n v_n). \qquad \boxtimes$$

Es: Dimostrare che $\mathcal{B}=\left\{\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\right\}$ è una base di $\mathbb{R}^2$ e trovare le coordinate del vettore $v=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ nella base $\mathcal{B}$.

Sol.: Dato che $\dim \mathbb{R}^2 = 2 = |\mathcal{B}|$ è sufficiente far vedere che $\mathcal{B}$ è linearmente Ind.

$$\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}=t\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} \iff \begin{matrix}2=t\\1=2t\end{matrix} \quad \lightning .$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\notin\left\langle\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\right\rangle \Rightarrow \mathcal{B} \text{ è lin. indipendente.}$$

Troviamo le coordinate di v in $\mathcal{B}$:

$$\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=x_1\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$$

$$\iff \quad 1 = x_1+2x_2\ ,\ 1=2x_1+x_2$$

$$\Rightarrow x_1 = 1-2x_2 \Rightarrow 1 = 2(1-2x_2)+x_2$$

$$\Rightarrow 1 = 2-4x_2+x_2 = 2-3x_2$$

$$\Rightarrow 3x_2 = 1 \Rightarrow x_2=\frac{1}{3} \Rightarrow x_1 = 1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow F_{\mathcal{B}}\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}1/3\\1/3\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}.$$

$\blacksquare$

OSS1: Se $\dim V = n$ e $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ genera V allora $\mathcal{B}$ è lin. Ind.

Infatti, se $\mathcal{B}$ fosse lin. Dip. esisterebbe i t.c. $v_i \in \langle \mathcal{B} \setminus \{v_i\} \rangle$

Ma allora

$$V = \langle \mathcal{B} \rangle = \langle \mathcal{B} \setminus \{v_i\} \rangle.$$

Poiché $\dim V = n$ esiste un insieme linearmente indipendente che ha n elementi. Ma per il Teorema fondamentale dell'indipendenza lineare,

$$n \leq |\mathcal{B} \setminus \{v_i\}| = n-1 \quad \lightning.$$

$\blacksquare$

OSS2: Se $\dim V = n$ e $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ è linearmente indip. allora $\mathcal{B}$ genera V. (Esercizio).

<u>Prop.</u>: Se V ammette una base e $U \subseteq V$ é un sottospazio vettoriale non-nullo, allora anche U ammette una base.

<u>dim</u>: $V = \langle v_1, \dots, v_n \rangle \supseteq U \neq \{0_V\}$.
Sia $u \in U$ $u \neq 0_V$. Applichiamo l'algoritmo a $\{u\}$ in U. Dopo al più n passi l'algoritmo si ferma e produce una base di U. $\blacksquare$

<u>COR</u>: Se $U \subseteq V$ é un sottospazio vettoriale di V e $\dim V = n$, allora $\dim U \leq \dim V$.

<u>dim</u>: Se $U = \{0_V\}$ allora $\dim U = 0$.
Se $U \neq \{0_V\}$, per la proposizione, U ammette una base $\mathcal{B}_U$. Ma allora $\mathcal{B}_U$ é un insieme lin. indipendente di V.
Per il Teorema fondamentale dell'ind. lin.
$\dim U = |\mathcal{B}_U| \leq \dim V$. $\blacksquare$

Prop.: Se U è un s.sp. di V e $\dim U = \dim V$ allora $U = V$. Se $\dim U < \dim V$ allora $U \subsetneq V$.

dim: Sia $\mathcal{B}$ una base di U. Quindi $\mathcal{B}$ è un insieme lin. Ind. di vettori di V.

Se $|\mathcal{B}| = \dim U = \dim V$ allora $\mathcal{B}$ genera V.

Se $|\mathcal{B}| = \dim U < \dim V$ allora $U = \langle \mathcal{B} \rangle \subsetneq V$ perché altrimenti $\mathcal{B}$ genererebbe V e sarebbe quindi una base. Ma le basi di V hanno cardinalità $\dim V > |\mathcal{B}|$. $\blacksquare$

Teorema del completamento

Sia $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base di V
e sia $\mathcal{T} = \{w_1, \dots, w_r\} \subset V$ un insieme
lin. Ind.. Allora esistono $n-r$
vettori di $\mathcal{B}$ che uniti a $\mathcal{T}$
formano una base di V.

dim:

Applicare il Teorema fondamentale
dell'indipendenza lineare all'insieme
di generatori $\{v_1, \dots, v_n\}$ ed all'insieme
lin. Ind. $\mathcal{T}$. $\boxtimes$

(Soluzioni base di $x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 0$)

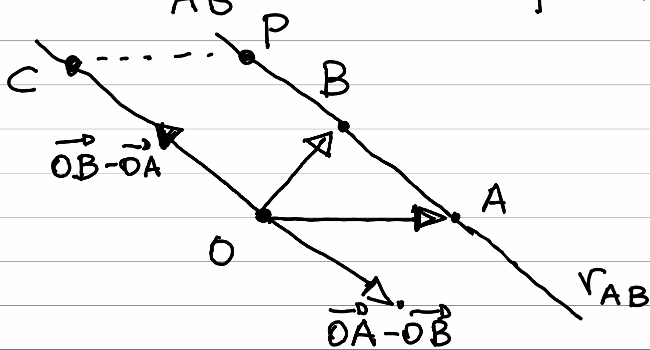
Somma di sottospazi

Dati due sottoinsiemi $U, W \subset V$ di uno spazio vettoriale V definiamo

$$U+W = \{u+w \mid u \in U, w \in W\}.$$

Es: $V = \mathcal{V}_O^2$, $A \neq O \neq B \neq A \in \mathcal{E}^2$.

Sia r_{AB} la retta per A e B.



$\forall P \in r_{AB}$, la differenza $\vec{OP}-\vec{OA} = \vec{OC}$ è un multiplo di $\vec{OB}-\vec{OA}$, ovvero $\exists t \in \mathbb{R}$ t.c. $\vec{OP} = \vec{OA} + t(\vec{OB}-\vec{OA})$.

Ne segue che

$$r_{AB} \text{ “}=\text{” } \{\vec{OP} \mid P \in r_{AB}\} = \{\vec{OA}\} + \langle \vec{OB}-\vec{OA} \rangle$$
$$=: \vec{OA} + \langle \vec{OB}-\vec{OA} \rangle.$$

Def: Un <u>sottospazio affine</u> di V è un sottoinsieme $W \subset V$ della forma

$$W = v + W_0$$

dove W_0 è un sottospazio vettoriale di V e v è un vettore di V.

OSS: ·) W è un s. sp. vett. $\Leftrightarrow 0_V \in W \Leftrightarrow v \in W_0$.

·) $W = v + W_0 = v' + W_0' \Rightarrow v - v' \in W_0 \cap W_0'$

·) <u>W_0 è univocamente determinato da W</u>: Infatti,

$W = v + W_0 = v' + W_0' \Rightarrow \forall w_0 \in W_0 \ \exists w_0' \in W_0'$ t.c.

$v + w_0 = v' + w_0' \Rightarrow w_0 = v' - v + w_0' \in W_0'$.

W_0 si chiama <u>sottospazio di giacitura</u> di W.

La dimensione di W è <u>per definizione</u>

$$\dim W := \dim W_0.$$

Se $\dim W = 0$ allora W si dice un <u>punto</u>

Se $\dim W = 1$ allora W si dice una <u>retta</u>

Se $\dim W = 2$ allora W si dice un <u>piano</u>

Se $\dim W = \dim V - 1$ allora W si dice <u>iperpiano</u>.

Se $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ è una <u>base</u> di W_0, allora $v_1, \dots, v_n$ si dicono <u>vettori direttori</u> di W.

<u>Sottospazi affini di $\mathcal{V}_0^2$:</u>

·) dimensione 0 : $\{\overrightarrow{OP}\}$. (<u>punti</u>)

·) dimensione 1 : <u>rette</u> ; $\forall B \neq A$

$\overrightarrow{OA} + \langle \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} \rangle$ retta per A e B.

·) dimensione 2 : $\mathcal{V}_0^2$.

<u>Sottospazi affini di $\mathcal{V}_0^3$</u>

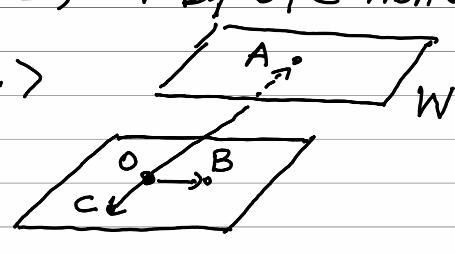
·) <u>punti</u> (dimensione 0) : $\{\overrightarrow{OP}\}$

·) <u>rette</u> (dimensione 1) : $\forall B \neq A$:

$\overrightarrow{OA} + \langle \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} \rangle$

·) <u>piani</u> (dimensione 2) : $\forall B \neq O \neq C$ non allineati

$W = \overrightarrow{OA} + \langle \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC} \rangle$



·) dimensione 3 = $\mathcal{V}_0^3$.

Es: $W := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 - x_2 - x_3 = 1 \right\} \subset \mathbb{R}^3$

Dimostrare che W è un sottospazio affine, calcolarne la dimensione ed i vettori direttori.

Sol.: Scegliamo $v \in W$, ad esempio $v = e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Osserviamo che se $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in W$ allora

$X - v = \begin{pmatrix} x_1 - 1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ soddisfa $(x_1 - 1) - x_2 - x_3 = 0$.

Poniamo $W_0 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 - x_2 - x_3 = 0 \right\}$.

Dimostriamo che $W = v + W_0$: se $X \in W$ allora $X - v \in W_0$; se $X_0 \in W_0$ allora $v + X_0 \in W$.

Le soluzioni-base in W_0 sono

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Dato che $W_0 = \langle v_1, v_2 \rangle$, v_1 e v_2 sono vettori direttori di W:

$$\boxed{W = v + \langle v_1, v_2 \rangle}$$

Eq. parametriche di W.

Formula di Grassmann

Dati $U, W \subset V$ sottospazi vettoriali,
allora $U+W$ è un sottospazio vettoriale e
vale la seguente formula:

$$(*) \quad \boxed{\dim(U+W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W)}$$

dim: $U+W$ è un s.sp. vettoriale (Esercizio).
Supponiamo che U e W ammettano
una base e dimostriamo la formula $(*)$.
Prendiamo una base $\mathcal{B}_{U\cap W} = \{v_1, \dots, v_t\}$ di $U \cap W$.
estendiamola a

$\mathcal{B}_U = \{v_1, \dots, v_t, u_{t+1}, \dots, u_\ell\}$ base di U

$\mathcal{B}_W = \{v_1, \dots, v_t, w_{t+1}, \dots, w_p\}$ base di W

(per cui $\ell = \dim U$, $p = \dim W$). Dimostriamo
che $\{v_1, \dots, v_t, u_{t+1}, \dots, u_\ell, w_{t+1}, \dots, w_p\} = \mathcal{B}$
è una base di $U+W$:

I) $\mathcal{B}$ è lin. Ind.: Se $\exists\, x_i, y_j, z_k \in \mathbb{R}$ t.c.

$$(\star) \quad \underbrace{\sum_{i=1}^{t} x_i v_i}_{:= v} + \underbrace{\sum_{j=1}^{l-t} y_{t+j} u_{t+j}}_{:= u} + \underbrace{\sum_{k=1}^{p-t} z_{t+k} w_{t+k}}_{:= w} = 0_V$$

$v + u + w = 0_V$ con $v \in U \cap W$, $u \in U$, $w \in W$

$\Rightarrow$ $w = -v - u \in U$ $\Rightarrow$ $w \in U \cap W$

$\Rightarrow$ w è combinazione lineare di $v_1, \dots, v_t$:

$$w = \sum z_{t+k} w_{t+k} = s_1 v_1 + \dots + s_t v_t$$

$$\Rightarrow \quad s_1 v_1 + \dots + s_t v_t - \left(\sum z_{t+k} w_{t+k}\right) = 0_V$$

$\Rightarrow$ $s_1 = \dots = s_t = z_{t+1} = \dots = z_p = 0$

$\mathcal{B}_W$ è Lin Ind.

$\Rightarrow$ $w = 0_V$.

$\Rightarrow$ $u + v = 0_V$ $\Rightarrow$ $v \in U \cap W$

$\Rightarrow$ $\exists\, s_1, \dots, s_t \in \mathbb{R}$ t.c.

$$\sum y_{t+j} u_{t+j} = s_1 v_1 + \dots + s_t v_t$$

$\Rightarrow$ $s_1 = s_2 = \dots = s_t = 0 = y_{t+1} = \dots = y_l$

$\mathcal{B}_U$ è Lin Ind.

$\Rightarrow \quad u = 0$

$\Rightarrow \quad v = 0 \underset{\mathcal{B}_{U\cap W} \text{ lin. Ind.}}{\Rightarrow} \quad x_1 = \dots = x_t = 0.$

In conclusione, la relazione (☆) ha l'unica soluzione banale. Ne segue che $\mathcal{B}$ è lin. Indipendente.

II) $\mathcal{B}$ genera $U+W$:

Sia $v \in U+W$. Allora $\exists\, u \in U$ e $w \in W$ t.c.

$$v = u + w.$$

Dato che $\mathcal{B}_U$ è una base di U $\exists\, s_1, \dots, s_e \in \mathbb{R}$:

$$u = s_1 v_1 + \dots + s_t v_t + s_{t+1} u_{t+1} + \dots + s_e u_e$$

Dato che $\mathcal{B}_W$ è una base di W $\exists\, x_1, \dots, x_p \in \mathbb{R}$:

$$w = x_1 v_1 + \dots + x_t v_t + x_{t+1} w_{t+1} + \dots + x_p w_p.$$

Quindi

$$v = u + w = (s_1 + x_1) v_1 + \dots + (s_t + x_t)$$

$$= (s_1 + x_1) v_1 + \dots + (s_t + x_t) v_t + s_{t+1} u_{t+1} + \dots + s_e u_e +$$

$$+ x_{t+1} w_{t+1} + \dots + x_p w_p \in \langle \mathcal{B} \rangle$$

☒

<u>Esercizio</u>: Si considerino

$U = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \right\}, W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right\rangle \subset \mathbb{R}^3.$

Osservare che U è un sottospazio vettoriale e calcolare $\dim U$, $\dim W$, $\dim U \cap W$, $\dim U + W$.

<u>Sol.</u>: $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ $\forall X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \in U$ si ha

$$(\alpha x_1 + \beta y_1) + 2(\alpha x_2 + \beta y_2) + (\alpha x_3 + \beta y_3) = \alpha(x_1 + 2x_2 + x_3) + \beta(y_1 + 2y_2 + y_3) = 0$$

e quindi $\alpha X + \beta Y \in U$ ed U è un s.sp. vett.

$x_1 = -2x_2 - x_3$. Per $x_2 = 1$ e $x_3 = 0$ si ottiene $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Per $x_2 = 0$ e $x_3 = 1$ si ottiene $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Una base di U è $\left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ e $\dim U = 2$.

$\dim W = 2$ perché $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \notin \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$.

$\dim(U+W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W) = 4 - \dim(U \cap W)$.

Quindi $\dim U \cap W \geq 1$. Inoltre $\dim U \cap W \leq \dim U = 2$.

Se $\dim U \cap W = 2$ allora $U = W$. Ma $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \notin U$.

Ne segue che $\dim U \cap W = 1$ e $\dim U + W = 3$,

ovvero $U + W = \mathbb{R}^3$.

<u>Es</u>: $U = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0 \right\} \subseteq \mathbb{R}^3$

$W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle \subseteq \mathbb{R}^3$

Dimostrare che U è un sottospazio vettoriale e calcolare:

$\dim U$, $\dim W$, $\dim (U \cap W)$, $\dim (U + W)$

<u>Sol.</u>:

$U = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} : x_1 = -x_2 - x_3 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} -x_2 - x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mid x_2, x_3 \in \mathbb{R} \right\}$

$= \left\{ x_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid x_2, x_3 \in \mathbb{R} \right\}$

$= \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$

Quindi U è un s.sp. vettoriale. Inoltre $\dim U = 2$, perché i due generatori sono lin. ind.

<u>Notazione</u>: $x_1 = -x_2 - x_3$: x_1 si chiama variabile dipendente o dominante.

x_2, x_3 : si chiamano variabili indipendenti o libere.

Le soluzioni $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ di $x_1 = -x_2 - x_3$ si chiamano <u>soluzioni-base</u> e si ottengono ponendo una variabile indipendente uguale a uno e l'altra uguale a zero.

$W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$ ha dimensione due perché i due generatori sono lin. Ind.

Dalla formula di Grassmann

$$\dim(U+W) + \dim(U \cap W) = 4.$$

Inoltre $2 \leq \dim(U+W) \leq 3$. Quindi ci sono solo 2 possibilità:

$\dim(U+W)$	2	3
$\dim(U \cap W)$	2	1

Se $\dim U \cap W = 2$, allora $U = W$. Ma $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \in W$ non soddisfa $x_1 + x_2 + x_3$.

Ne segue che $\dim U \cap W = 1$ e $\dim U + W = 3$.

Quindi $U + W = \mathbb{R}^3$. ☒