

Termodinamica

1) In un recipiente di volume $V = 20 \ell$ sono contenute 0.5 moli di N_2 (PM=28) alla temperatura di $27^\circ C$.

- a) Quanto vale la densità dell'azoto all'interno del recipiente?
- b) Quanto vale la pressione all'interno del recipiente?
- c) Quanto valgono l'energia media traslazionale e la velocità media delle molecole?
- d) Quanto valgono l'energia totale di una singola molecola e l'energia interna del gas?

(Si consideri l'azoto un gas perfetto)

$$\text{Ris.: } d = 0.7 \text{ kg/m}^3; \quad P = 0.615 \text{ atm}; \quad E_{tr} = 6.2 \cdot 10^{-21} \text{ J}; \quad v = 520 \text{ m/s}; \quad E_{tot} = 1.03 \cdot 10^{-20} \text{ J}; \\ U = 3.1 \text{ kJ}$$

Soluzione:

- a) **Quanto vale la densità dell'azoto nel recipiente?**

La densità è definita come

$$d = \frac{m}{V}$$

- **Quanto vale la massa dell'azoto nel recipiente?**

La massa è legata al numero di moli dalla definizione di peso molecolare:

$$m = n PM$$

quindi

$$d = \frac{n PM}{V} = \frac{0.5 \text{ moli} \cdot 28 \text{ g/mole}}{20 \ell} = 0.7 \text{ g/l} = 0.7 \text{ kg/m}^3$$

- b) **Quanto vale la pressione all'interno del recipiente?**

- La pressione è definita come

$$P = \frac{F}{S}$$

- nel caso dei gas perfetti vale la relazione

$$PV = nRT$$

quindi

$$P = \frac{nRT}{V}$$

Numericamente:

$$P = \frac{nRT}{V} = \frac{0.5 \text{ moli} \cdot 0.082 \ell \text{ atm/moli K} \cdot 300 \text{ K}}{20 \ell} = 0.615 \text{ atm}$$

- c) **Quanto valgono l'energia media traslazionale e la velocità media delle molecole?**

L'energia media traslazionale di una molecola è definita come

$$E_{tr} = \frac{1}{2} m v_m^2$$

la teoria cinetica dei gas afferma che la temperatura è legata all'energia cinetica traslazionale media delle molecole dalla relazione

$$\frac{3}{2} kT = E_{tr}$$

dove

$$k = \frac{R}{N_A} = \frac{8.31 \text{ J/mole K}}{6 \cdot 10^{23} \text{ particelle/mole}} = 1.38 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$$

è detta costante di Boltzmann. quindi

$$E_{tr} = \frac{3}{2}kT = \frac{3}{2} \cdot 1.38 \cdot 10^{-23} J/K \cdot 300 K = 6.2 \cdot 10^{-21} J$$

La velocità di traslazione media delle molecole è data da

$$v = \sqrt{\frac{2E_{tr}}{m}}$$

e la massa di ciascuna molecola può essere ricavata dal peso molecolare

$$m = \frac{PM}{N_A}$$

quindi (ricordando l'espressione di E_{tr} e la definizione di k)

$$v = \sqrt{\frac{2E_{tr}N_A}{PM}} = \sqrt{\frac{3RT}{PM}}$$

Numericamente:

$$v = \sqrt{\frac{3RT}{PM}} = \sqrt{\frac{3 \cdot 8.31 J/mole K \cdot 300 K}{28 g/mole}} = \sqrt{\frac{3 \cdot 8.31 J/mole K \cdot 300 K}{28 \cdot 10^{-3} kg/mole}} = 520 m/s$$

d) **Quanto valgono l'energia totale di una singola molecola e l'energia interna del gas?**

L'energia totale di una singola molecola è data dalla traslazione, rotazionale, vibrazionale e potenziale.

Nel caso dei gas perfetti l'energia potenziale (o di legame) è nulla.

Ognuno dei "gradi di libertà" di una molecola ha in media energia pari a

$$E = \frac{1}{2}kT$$

Nel caso di una molecola biatomica oltre ai tr gradi di libertà di traslazione (corrispondenti all'energia cinetica traslazionale) si hanno altri due gradi di libertà:

$$E_{tot} = \frac{5}{2}kT$$

quindi

$$E_{tot} = \frac{5}{2}kT = 1.03 \cdot 10^{-20} J$$

L'energia interna del gas è data dalla somma delle energia delle singole molecole:

$$U = \sum_i E_{tot} = N E_{tot}$$

Il numero totale di molecole si può ricavare a partire dal numero di moli:

$$N = n N_A$$

quindi (ricordando la definizione di k)

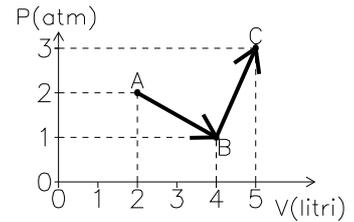
$$U = N E_{tot} = n N_A \frac{5}{2}kT = \frac{5}{2}nRT$$

numericamente:

$$U = \frac{5}{2}nRT = 3.1 kJ$$

2) 0.2 moli di gas perfetto monoatomico compiono la trasformazione indicata in figura. Calcolare:

- le temperature T_A , T_B e T_C
- la variazione complessiva di energia interna nella trasformazione $A \rightarrow B \rightarrow C$
- il lavoro totale compiuto $L_{A \rightarrow C}$
- il calore complessivamente assorbito (con il relativo segno)



Ris.: $T_A = T_B = 244 K, T_C = 915 K; \Delta U = 1670 J, L = 500 J; Q = 2170 J$

Soluzione:

a) **Quanto valgono le temperature T_A , T_B e T_C ?**

Si tratta di un gas perfetto, per cui deve valere la legge dei gas perfetti

$$PV = nRT$$

da cui

$$T = \frac{PV}{nR}$$

per calcolare T ho quindi bisogno di conoscere il numero di moli (n) la pressione (P) ed il volume (V).

I valori di pressione non vengono dati in forma numerica ma devono essere ricavati dal grafico: Utilizzando i dati della tabella:

	P [atm]	V [ℓ]
A	2	2
B	1	4
A	3	5

$$T_A = \frac{PV}{nR} = \frac{2 \text{ atm} \cdot 2 \ell}{0.02 \text{ moli} \cdot 0.082 \ell \text{ atm/mole K}} = 244 K$$

$$T_B = \frac{PV}{nR} = \frac{1 \text{ atm} \cdot 4 \ell}{0.02 \text{ moli} \cdot 0.082 \ell \text{ atm/mole K}} = 244 K$$

$$T_C = \frac{PV}{nR} = \frac{3 \text{ atm} \cdot 5 \ell}{0.02 \text{ mol} \cdot 0.082 \ell \text{ atm/mole K}} = 915 K$$

b) **Quanto vale la variazione di energia interna nella trasformazione $A \rightarrow B \rightarrow C$**

La variazione di energia interna è definita come

$$\Delta U = U_{fin} - U_{in}$$

dove U (energia interna) è una funzione di stato che dipende soltanto dalla temperatura.

- L'energia interna è definita come la somma delle energie cinetiche e potenziali delle molecole.
- la variazione di energia interna è legata al calore e al lavoro dal primo principio della termodinamica

$$\Delta U = Q_{ass} - \mathcal{L}_{gas} = Q_{ass} + L_{est}$$

- la variazione di energia interna è legata al calore specifico a volume costante dalla relazione

$$\Delta U = n c_v \Delta T$$

Tutte queste relazioni sono applicabili (cioè valide) nel caso in questione.

Verifichiamo se sono utilizzabili in pratica:

- per utilizzare la definizione di energia interna devo ricorrere al modello corpuscolare del gas perfetto:

Nel caso di un gas perfetto l'energia potenziale è zero, quindi devo calcolare la variazione di energia cinetica delle molecole.

$$\Delta U = \Delta E_{cin} \cdot N_{molecole}$$

L'energia cinetica media di una molecola vale

$$E_{cin} = \frac{\nu}{2} kT$$

dove T è la temperatura, $k = \frac{R}{N_A}$ è la costante di Boltzmann e ν è il numero di gradi di libertà che vale 3 per gas monoatomici e 5 per gas biatomici.

$$\Delta U = \Delta E_{cin} \cdot N_{molecole} = \frac{\nu}{2} \frac{R}{N_A} \Delta T \cdot N_{molecole} = \frac{\nu}{2} R \frac{N_{molecole}}{N_A} \Delta T = \frac{\nu}{2} R n \Delta T$$

In questo caso il gas è monoatomico quindi $\nu = 3$

$$\Delta U = \frac{\nu}{2} n R \Delta T = \frac{3}{2} n R \Delta T = \frac{3}{2} 0.02 \text{ moli} \cdot 8.31 \text{ J/mole K} (915 - 244) \text{ K} = 1670 \text{ J}$$

- per utilizzare il primo principio della termodinamica devo conoscere il lavoro e il calore scambiato. Mentre il lavoro compiuto dal gas posso in qualche modo ricavarlo dal grafico $P(V)$, non saprei come calcolare il calore assorbito in una trasformazione in cui cambiano sia P che V . Quindi il primo principio (ancorché valido) in questo caso non è utile in pratica.
- per calcolare la variazione di energia interna devo conoscere il calore specifico a volume costante del gas.

– **Quanto vale il calore specifico a volume costante di un gas perfetto**

In base alla teoria cinetica dei gas i calori specifici molari dei gas perfetti valgono:

$$\begin{aligned} c_v &= \frac{3}{2} R & (\text{monoatomici}) \\ c_v &= \frac{5}{2} R & (\text{biatomici}) \\ c_p &= c_v + R \end{aligned}$$

in questo caso il gas è monoatomico quindi

$$c_v = \frac{3}{2} R$$

quindi

$$\Delta U = n c_v \Delta T = n \frac{3}{2} R \Delta T$$

Numericamente:

$$\Delta U = n \frac{3}{2} R \Delta T = 0.02 \text{ moli} \cdot \frac{3}{2} \cdot 8.31 \text{ J/mole K} (915 - 244) \text{ K} = 1670 \text{ J}$$

c) **Quanto vale il lavoro compiuto dal gas nella trasformazione $A \rightarrow B \rightarrow C$?**

Il lavoro compiuto da un gas è definito come

$$\mathcal{L}_{gas} = \int_A^C P dV$$

L'integrale di una funzione è dato dall'area al di sotto della curva. Avendo il grafico di $P(V)$ posso calcolare l'integrale graficamente scomponendola ad esempio in un rettangolo (base da 2 a 5 ℓ e altezza da 0 a 1 atm) e due triangoli (il primo con base da 2 a 4 ℓ e altezza da 1 a 2 atm; il secondo con base da 4 a 5 ℓ e altezza da 1 a 3 atm)

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{A \rightarrow B \rightarrow C} &= (5 - 2) \ell \cdot (1 - 0) \text{ atm} + \frac{1}{2} (4 - 2) \ell \cdot (2 - 1) \text{ atm} + \frac{1}{2} (5 - 1) \ell \cdot (3 - 1) \text{ atm} \\ &= 5 \text{ latm} = 5 \frac{1}{1000} \text{ m}^3 \cdot 10^5 \text{ Pa} = 500 \text{ J} \end{aligned}$$

Il lavoro compiuto dal gas è positivo (il volume è aumentato)

- d) **Quanto vale il calore complessivamente assorbito nella trasformazione $A \rightarrow B \rightarrow C$**
La quantità di calore assorbito (o ceduto) da un corpo può essere determinata in vari modi: utilizzando i calori specifici, conoscendo le leggi che determinano lo scambio di calore in casi particolari (ad esempio l'irraggiamento) o facendo ricorso al primo principio della termodinamica. In questo caso non posso utilizzare i calori specifici a pressione o volume costante, perchè dal grafico osservo che durante la trasformazione P e V variano contemporaneamente. Il primo principio della termodinamica afferma che in una qualsiasi trasformazione

$$\Delta U = Q - \mathcal{L}_{gas}$$

E' una relazione sempre applicabile, ed in questo caso ho anche i dati necessari per applicarla.

$$Q = \Delta U + \mathcal{L}_{gas} = 1670 J + 500 J = 2170 J$$

- 3) 3 ℓ di elio alla pressione di 15 atm si trovano alla temperatura iniziale di 549 K. Il gas viene fatto espandere a pressione costante fino al volume di 6 ℓ e successivamente raffreddato a volume costante fino a tornare al valore iniziale di temperatura.
- Quanto vale la pressione finale?
 - Descrivere la trasformazione sopra indicata nel piano PV.
 - Quanto vale la variazione totale di energia interna del gas nell'intera trasformazione?
 - Quanto lavoro è stato compiuto in totale dal gas?
 - Il gas ha ceduto o assorbito calore? Calcolare la quantità di calore scambiata nella trasformazione.

Ris.: $P_{fin} = 7.5 \text{ atm}$; $\Delta U = 0$; $\mathcal{L}_{gas} = 4.5 \cdot 10^3 \text{ J}$; $Q_{assorbito} = 1.08 \cdot 10^3 \text{ cal}$

Soluzione:

- a) Quanto vale la pressione finale?

- La legge dei gas perfetti afferma che

$$PV = nRT$$

in questo caso quindi

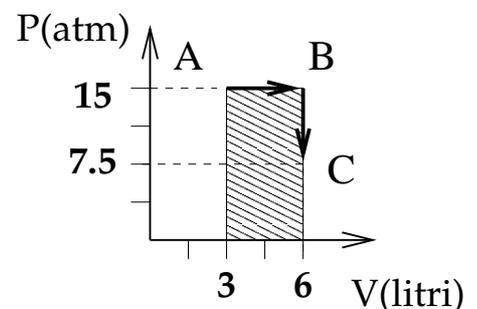
$$P_{fin} = \frac{nRT_{fin}}{V_{fin}}$$

Numericamente:

$$P_{fin} = \frac{nRT_{fin}}{V_{fin}} = \frac{1 \text{ mole} \cdot 0.082 \text{ ℓ atm/moli K} \cdot 549 \text{ K}}{6 \text{ ℓ}} = 7.5 \text{ atm}$$

- b) Costruire il grafico P(V) della trasformazione. Costruisco la tabella e riporto i valori nel grafico:

P(atm)	V [ℓ]
15	3
15	6
7.5	6



- c) Quanto vale la variazione di energia interna nell'intera trasformazione?

La variazione di energia interna è definita come

$$\Delta U = U_{fin} - U_{in}$$

- Il primo principio della termodinamica afferma che

$$\Delta U = Q + L_{est} = Q - \mathcal{L}_{gas}$$

Q e \mathcal{L}_{gas} devono essere calcolate.

- L'energia interna è una funzione di stato che dipende solo dalla temperatura e dallo stato di aggregazione.
- Se non ci sono cambiamenti di stato

$$\Delta U = n c_v \Delta T$$

In questo caso non ci sono cambiamenti di stato e $T_{fin} = T_{in}$, quindi

$$\Delta U = 0$$

d) **Quanto lavoro è stato compiuto dal gas nell'intera trasformazione?**

Il lavoro compiuto da un gas durante una trasformazione è dato da

$$\mathcal{L}_{gas} = \int_{V_{in}}^{V_{fin}} P dV$$

- In questo caso la trasformazione procede in due fasi, prima a pressione costante e poi a volume costante.

Durante la trasformazione a pressione costante

$$\mathcal{L}_{gas} = \int_{V_{in}}^{V_{fin}} P dV = P_{in} \Delta V$$

Durante la trasformazione a volume costante

$$\mathcal{L}_{gas} = \int_{V_{in}}^{V_{fin}} P dV = 0$$

- L'integrale può essere calcolato dal grafico $P(V)$ come area sottesa alla curva che rappresenta la trasformazione, ossia del rettangolo tratteggiato in figura

$$\mathcal{L}_{gas} = (base) \times (altezza) = (V_{fin} - V_{in}) P_{in}$$

Numericamente:

$$\mathcal{L}_{gas} = P_{in} \Delta V = 15 \text{ atm} \cdot 3 \ell = 15(10^5 \text{ Pa}) \cdot 3(10^{-3} \text{ m}^3) = 4.5 \cdot 10^3 \text{ J}$$

e) **Il gas ha ceduto o assorbito calore? Calcolare il calore scambiato.**

Dato che il volume è aumentato (quindi il gas ha compiuto lavoro) e la temperatura è rimasta costante il gas deve aver assorbito calore.

- Il primo principio della termodinamica afferma che

$$\Delta U = Q + L_{est} = Q - \mathcal{L}_{gas}$$

in questo caso $\Delta U = 0$ quindi

$$Q = \mathcal{L}_{gas} = P_{in} \Delta V$$

- La trasformazione procede prima a pressione costante e poi a volume costante. Il calore scambiato nell'intera trasformazione sarà quindi dato da

$$Q = Q_{P_{cost}} + Q_{V_{cost}}$$

- **Quanto vale il calore scambiato nella trasformazione a P_{cost} ?**

Per un gas perfetto il calore scambiato in una trasformazione a P_{cost} è dato da

$$Q_{P_{cost}} = n c_p \Delta T = n c_p (T_A - T_{in})$$

dove T_A è la temperatura raggiunta la termine della trasformazione a P_{cost}

- **Quanto vale il calore scambiato nella trasformazione a V_{cost} ?**

Per un gas perfetto il calore scambiato in una trasformazione a V_{cost} è dato da

$$Q_{V_{cost}} = n c_v \Delta T = n c_v (T_{fin} - T_A)$$

Quindi

$$Q = Q_{P_{cost}} + Q_{V_{cost}} = n c_p (T_A - T_{in}) + n c_v (T_{fin} - T_A)$$

Visto che $T_{in} = T_{fin}$

$$Q = n c_p (T_A - T_{in}) + n c_v (T_{fin} - T_A) = n (c_p - c_v) (T_A - T_{in})$$

ma $c_p - c_v = R$ e inoltre $T_A = \frac{P_{in} V_{fin}}{nR}$ e $T_{in} = \frac{P_{in} V_{in}}{nR}$:

$$Q = nR \frac{P_{in} V_{fin} - P_{in} V_{in}}{nR} = P_{in} \Delta V$$

Numericamente quindi:

$$Q = P_{in} \Delta V = 4.5 \cdot 10^3 \text{ J} = 1.08 \cdot 10^3 \text{ cal}$$

- 4) Due grammi di azoto (N_2 ; P.M.=28) alla temperatura iniziale di $0^\circ C$ sono posti in un contenitore di volume pari a 2ℓ , dotato di una valvola che si apre quando la pressione interna raggiunge 1.5 atm .
- Quanto vale la pressione iniziale del gas?
 - Quanto vale la temperatura del gas quando la valvola si apre?
 - Quanto calore è stato fornito al gas per raggiungere tale temperatura?

$$\text{Ris.: } P_{in} = 0.8\text{ atm}; \quad T = 512\text{ K}; \quad Q = 85\text{ cal}$$

Soluzione:

- a) **Quanto vale la pressione iniziale del gas?**

La pressione iniziale del gas è legata al volume e alla temperatura dalla legge dei gas perfetti

$$PV = nRT$$

per utilizzarla devo conoscere il numero di moli di gas

- Quanto vale in numero di moli?** Il numero di moli è definito come

$$n = \frac{N_{molecole}}{N_{Avog}}$$

il numero di moli è legato alla massa dalla relazione

$$n = \frac{m}{P.M.}$$

in questo caso quindi:

$$n = \frac{m}{P.M.} = \frac{2\text{ g}}{28\text{ g/mole}} = 0.07\text{ moli}$$

quindi la pressione iniziale vale

$$P_{in} = \frac{nRT_{in}}{V}$$

numericamente

$$P_{in} = \frac{nRT_{in}}{V} = \frac{0.07\text{ moli} \cdot 0.082\text{ l atm/moli K} \cdot 273\text{ K}}{2\text{ l}} = 0.8\text{ atm}$$

- b) **Quanto vale la temperatura del gas quando la valvola si apre?**

La temperatura del gas nel momento in cui si apre la valvola è legata al volume e alla pressione del gas tramite la legge dei gas perfetti:

$$PV = nRT$$

La pressione interna (nel momento in cui la valvola si apre) è 1.5 atm mentre volume e numero di moli rimangono costanti:

$$T_{fin} = \frac{P_{fin}V}{nR}$$

Numericamente

$$T_{fin} = \frac{P_{fin}V}{nR} = \frac{1.5\text{ atm} \cdot 2\text{ l}}{0.07\text{ moli} \cdot 0.082\text{ l atm/moli K}} = 522.6\text{ K}$$

- c) **Quanto calore è stato fornito al gas?** La quantità di calore fornita al gas è legata alla differenza di temperatura dalla relazione:

$$Q = nC_{sp}\Delta T$$

- **Quanto vale il calore specifico del gas?**

I calori specifici sono diversi nel caso di trasformazioni a volume costante o a pressione costante. In questo caso nella trasformazione si mantiene costante il volume.

La teoria cinetica dei gas permette di ricavare il calore specifico molare di gas perfetti.

Il calore specifico molare a volume costante nel caso di un gas perfetto vale:

$$c_v = \frac{\nu}{2}R$$

dove ν è il numero di gradi di libertà della molecola (vale 3 per gas monoatomici e 5 per gas biatomici)

In questo caso l'azoto è una molecola biatomica, quindi

$$c_v = \frac{5}{2}R$$

La quantità di calore assorbita dal gas è data quindi da:

$$Q = nc_v\Delta T = \frac{5}{2}nR\Delta T$$

Numericamente:

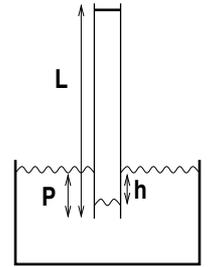
$$Q = \frac{5}{2}nR\Delta T = \frac{5}{2} \cdot 0.07 \text{ moli} \cdot 8.31 \text{ J/mole K} (522.6 \text{ K} - 273 \text{ K}) = 363 \text{ J} = 86.9 \text{ cal}$$

- 5) Un tubo di sezione 2 dm^2 , alto 1 m è chiuso superiormente da un pistone a tenuta perfettamente scorrevole e di massa trascurabile, mentre l'estremo inferiore è aperto e pesca per 10 cm in una vasca piena d'acqua. Il sistema si trova a 37°C .

All'inizio il pistone si trova all'estremità superiore del tubo ed il livello dell'acqua del tubo è uguale a quello dell'acqua nel recipiente.

- a) Quanto vale il volume occupato dall'aria ed il numero di moli di aria contenute nel tubo?

Se ad un certo punto si mette un peso sopra il pistone, questo si abbassa e anche l'acqua nel tubo scende nel tubo (vedi figura) fino ad una profondità di 8 cm al di sotto del pelo libero dell'acqua nel recipiente.



- b) Quanto vale la pressione assoluta esercitata dal gas?
 c) Quanto vale in queste condizioni il volume occupato dal gas (la temperatura rimane costante)?
 d) Quanto vale la variazione di energia interna del gas?

$$\text{Ris.: } V = 18\text{ l}; \quad n = 0.71\text{ moli}; \quad P = 1.021 \cdot 10^5\text{ Pa}; \quad V_{fin} = 17.86\text{ l}; \quad \Delta U = 0$$

Soluzione:

- a) **Quanto vale il volume inizialmente occupato dall'aria?**

In base al disegno e al testo inizialmente l'aria occupa tutto il volume del tubo che si trova al di sopra del livello dell'acqua

$$V = \Delta H \cdot S = (L - P) \cdot S$$

Numericamente:

$$V = (L - P) \cdot S = (1\text{ m} - 10\text{ cm}) \cdot 2\text{ dm}^2 = 0.9\text{ m} \cdot 2 \cdot 10^{-2}\text{ m}^2 = 18\text{ l}$$

- b) **Quante moli sono contenute nel tubo?**

- Il numero di moli è definito come

$$n = \frac{N_{molecole}}{N_{Av}}$$

- Il numero di moli è legato alla massa di sostanza dalla relazione:

$$m = n \cdot P.M.$$

- Nel caso di un gas perfetto il numero di moli è legato a pressione, volume e temperatura dalla legge dei gas perfetti:

$$PV = nRT$$

Per poter applicare la legge dei gas perfetti è necessario conoscere la pressione del gas.

- **Quanto vale la pressione dell'aria nel tubo?** La pressione del gas è uguale alla pressione alla superficie dell'acqua che si trova all'interno del tubo.

- * **Quanto vale la pressione sulla superficie dell'acqua?** L'acqua all'interno del tubo è ferma e in comunicazione con l'acqua nel recipiente, su cui agisce la pressione atmosferica.

Se il livello è lo stesso, vuol dire che la pressione che agisce sulla superficie del liquido all'interno del tubo è uguale a quella che agisce sulla superficie del liquido nel recipiente.

$$P_{gas} = P_{atm}$$

Quindi applicando la legge dei gas perfetti

$$n = \frac{PV}{RT}$$

Numericamente:

$$n = \frac{PV}{RT} = \frac{1 \text{ atm} \cdot 18 \ell}{0.082 \ell \text{ atm/moli K} \cdot 310 \text{ K}} = 0.71 \text{ moli}$$

c) **Quanto vale la pressione finale del gas dopo aver posto il peso sul pistone?**

Dopo aver posto un peso sul pistone il livello dell'acqua nel tubo si è abbassato di 8 cm rispetto al livello dell'acqua nel recipiente.

Se il liquido è in equilibrio, vuol dire che la pressione esercitata sulla superficie dell'acqua dall'aria entro il tubo è uguale a quella esercitata dal gas

$$P_{liq} = P_{tubo}$$

• **Quanto vale la pressione assoluta sulla superficie del liquido entro il tubo?**

L'acqua all'interno del tubo è ferma e in comunicazione con l'acqua nel recipiente, su cui agisce la pressione atmosferica.

– La pressione è definita come

$$P = \frac{F}{S}$$

– per un liquido ideale può essere applicato il teorema di Bernoulli

$$P_1 + dgh_1 + \frac{1}{2}dv_1^2 = P_2 + dgh_2 + \frac{1}{2}dv_2^2$$

dato che in questo caso il liquido è fermo la pressione sul pelo dell'acqua nel recipiente e dentro il tubo saranno legate dalla relazione:

$$P_{rec} + dgh_{rec} = P_{tubo} + dgh_{tubo}$$

$$P_{tubo} = P_{atm} + dg(h_{tubo} - h_{rec}) = P_{atm} + dg\Delta h$$

Numericamente:

$$\begin{aligned} P_{tubo} &= P_{atm} + dg\Delta h = 1 \text{ atm} + 10^3 \text{ kg/m}^3 \cdot 9.8 \text{ m/s}^2 \cdot 8 \text{ cm} \\ &= 1.013 \cdot 10^5 \text{ Pa} + 10^3 \text{ kg/m}^3 \cdot 9.8 \text{ m/s}^2 \cdot 0.08 \text{ m} = 1.021 \cdot 10^5 \text{ Pa} \end{aligned}$$

d) **Quanto vale il volume finale del gas?**

• Il volume è legato alla lunghezza del tubo piena di gas:

$$V_{fin} = \Delta H' \cdot S$$

ma in questo caso non si sa di quanto si sia abbassato il pistone

• Il volume è legato alla pressione e alla temperatura dalla legge di gas perfetti:

$$PV = nRT$$

la temperatura del gas è rimasta costante e il nuovo valore di pressione è stato appena calcolato

quindi

$$V_{fin} = \frac{nRT}{P_{tubo}} = \frac{0.71 \cdot 8.31 \text{ J/mole K} \cdot 310 \text{ K}}{1.021 \cdot 10^5 \text{ Pa}} = 1.79 \cdot 10^{-2} \text{ m}^3 = 17.9 \ell$$

e) **Quanto vale la variazione di energia interna?**

- L'energia interna è definita come la somma delle energie cinetiche e potenziali delle molecole
- L'energia interna è una funzione di stato che dipende solo dalla temperatura e dallo stato di aggregazione

In questo caso la temperatura non cambia e non ci sono cambiamenti di stato: l'energia interna non cambia:

$$\Delta U = 0$$

- 6) In un cilindro verticale, chiuso superiormente da un pistone scorrevole è contenuto vapor d'acqua saturo (essendo presente sul fondo una piccola quantità di liquido). Inizialmente il volume del recipiente è pari a 50ℓ , la temperatura è di $37^\circ C$ e la pressione è pari a 47 mmHg

Successivamente il pistone viene alzato, mantenendo la temperatura costante, fino al volume di 100ℓ .

- Anche la pressione e la densità del gas si mantengono costanti. Sapete spiegarne il motivo?
- Si calcolino il valore della massa di acqua passata allo stato aeriforme (supponendo valida la legge dei gas perfetti).
- Si calcolino infine il valore del calore assorbito dal sistema ($\lambda_{ev} = 540\text{ cal/gr}$), il lavoro fatto sul sistema, la variazione di energia interna del sistema, precisando il segno di ciascuna di tali quantità)

$$\text{Ris.: } m = 2.2\text{ g}; \quad Q = 1200\text{ cal}; \quad L_{est} = -\mathcal{L}_{gas} = -310\text{ J}; \quad \Delta U = 4.7\text{ kJ}$$

Soluzione:

- a) **Perchè la pressione e la densità del gas si mantengono costanti?**

• **Pressione ?**

- La pressione è definita come

$$P = \frac{F}{S}$$

- Nel caso dei gas perfetti

$$P = \frac{nRT}{V}$$

in questo caso il gas è vapor d'acqua saturo quindi non sarebbe appropriato applicare la legge dei gas perfetti

- La pressione di vapor saturo è il valore di pressione che si stabilisce all'equilibrio in un sistema chiuso in cui siano presenti liquido e vapore.

La pressione di vapor saturo dipende solo dalla temperatura.

All'equilibrio la pressione di vapor d'acqua sarà sempre uguale a quella di vapor saturo fintanto che rimane sul fondo un pó d'acqua. Se la temperatura non cambia anche la pressione di vapor saturo rimane costante.

- **Densità?** La densità del gas è definita

$$d = \frac{m}{V} = \frac{n}{V} PM$$

se la pressione e la temperatura rimangono costanti, rimarrà costante anche n/V

- b) **Calcolare la massa d'acqua passata allo stato aeriforme**

La massa d'acqua passata allo stato aeriforme è data dalla differenza fra la massa allo stato aeriforme prima e dopo l'espansione.

$$M_{ev} = M_{fin} - M_{in}$$

- **Quanto vale la massa d'acqua presente nel recipiente?**

- La massa d'acqua allo stato aeriforme è legata alla densità dalla relazione:

$$M = d_{vap} V$$

dovrei però conoscere la densità del vapor d'acqua.

- La massa d'acqua è ovviamente legata al numero di moli presenti allo stato aeriforme dalla relazione

$$M = n \cdot P.M.$$

- * **Quanto vale il numero di moli di vapor d'acqua?** Il testo suggerisce esplicitamente di usare le relazioni dei gas perfetti.

Per un gas perfetto

$$n = \frac{PV}{RT}$$

La massa d'acqua sotto forma di vapore vale quindi

$$M = \frac{PV}{RT} \cdot PM$$

La massa d'acqua evaporata sarà data quindi da

$$M_{ev} = M_{fin} - M_{in} = \left(\frac{P_{fin}V_{fin}}{RT_{fin}} - \frac{P_{in}V_{in}}{RT_{in}} \right) PM = \frac{P}{RT} (V_{fin} - V_{in}) PM$$

Numericamente:

$$\begin{aligned} M_{ev} = \frac{P}{RT} (V_{fin} - V_{in}) PM &= \frac{47 \text{ mmHg}}{0.082 \text{ l atm/moli K} \cdot 310 \text{ K}} (100 \text{ l} - 50 \text{ l}) 18 \text{ g/mole} \\ &= \frac{47 \left(\frac{1}{760} \text{ atm} \right)}{0.082 \text{ l atm/moli K} \cdot 310 \text{ K}} 50 \text{ l} 18 \text{ g/mole} = 2.2 \text{ g} \end{aligned}$$

- c) **Quanto vale il calore assorbito dal sistema?** Il calore è l'energia interna trasferita da un corpo all'altro

- il calore assorbito è legato alla variazione di energia interna

$$Q = \Delta U + \mathcal{L}_{sist}$$

- Il calore assorbito da un corpo se non ci sono cambiamenti di stato è legato al suo aumento di temperatura da

$$Q = mc_{sp}\Delta T$$

ma in questo caso la temperatura rimane costante e l'acqua evapora

- in un cambiamento di stato il calore assorbito è legato alla massa che effettua la transizione di stato:

$$Q = \lambda m_{trans}$$

La massa d'acqua evaporata è stata calcolata ed il calore latente di evaporazione dell'acqua è dato dal problema

Numericamente quindi

$$Q = \lambda M_{ev} = 540 \text{ cal/g} \cdot 2.2 \text{ g} = 1200 \text{ cal}$$

Quanto vale il lavoro compiuto sul sistema?

Il lavoro compiuto sul sistema dall'esterno è uguale e contrario al lavoro compiuto dal sistema.

$$L_{esterno} = -\mathcal{L}_{sist}$$

Il lavoro compiuto dal sistema è quello che il gas ha compiuto nella sua espansione:

$$\mathcal{L}_{sist} = \mathcal{L}_{gas} = \int PdV$$

Dato che la trasformazione è una trasformazione a pressione costante quindi

$$\mathcal{L}_{gas} = P\Delta V$$

Numericamente

$$\mathcal{L}_{gas} = P\Delta V = 47 \text{ mmHg} \cdot 50 \text{ l} = 47(133 \text{ Pa}) \cdot 50(10^{-3} \text{ m}^3) = 310 \text{ J}$$

quindi il lavoro compiuto dall'esterno sul sistema è pari a

$$L_{esterno} = -\mathcal{L}_{gas} = -310 \text{ J}$$

Quanto vale la variazione di energia interna?

- la variazione di energia interna è definita come

$$\Delta U = U_{fin} - U_{in}$$

- La variazione di energia interna può essere calcolata dal primo principio della termodinamica

$$\Delta U = Q + L_{esterno} = Q - \mathcal{L}_{gas}$$

In questo caso sia Q che L (o \mathcal{L}) sono noti

Numericamente:

$$\Delta U = Q + L_{esterno} = 1200 \text{ cal} - 310 \text{ J} = 1200 \cdot (4.18 \text{ J}) - 310 \text{ J} = 4700 \text{ J}$$