EUCLIDE COSTRUISCE CON RIGA E COMPASSO L'OTTAEDRO

(studenti e professori del Liceo Classico Tacito)

Chiara Castiglione

Giulia Cenciarelli

Lorenzo La Rosa

Martina Pafundi

Elisa Raimondo

Giorgia Rocchi

Prof.ssa Gioia Battilomo

Prof.ssa Valentina Raimondi

Euclide: “Elementi” XIII, proposizione 14

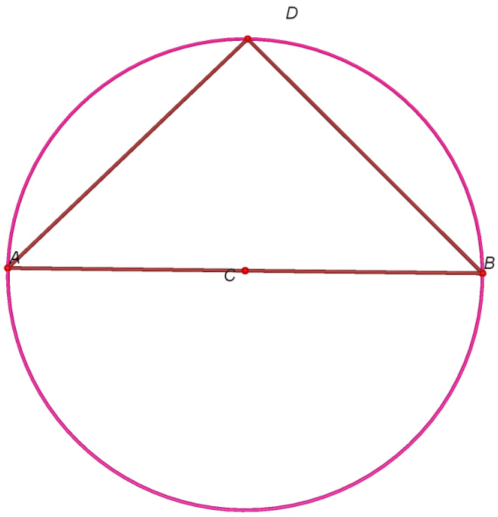
OBIETTIVO I

Ὀκτάεδρον συστήσασθαι καὶ σφαίρᾳ περιλαβεῖν, ᾗ καὶ τὰ πρότερα[1], καὶ δεῖξαι, ὅτι ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος δυνάμει[2] διπλασία ἐστὶ τοῦ ὀκτοαέδρου.	***Costruire un ottaedro e circondarlo con una sfera, con cui anche i precedenti solidi[1] e dimostrare che il diametro della sfera al quadrato è doppio del lato dell’ottaedro [2] al quadrato***

1. *Abbiamo aggiunto “solidi”: Euclide, a rigore, parla genericamente di “cose precedenti” (τὰ πρότερα- tà pròtera)*
2. *“Al quadrato” corrisponde al greco δυνάμει (dynàmei), che nel testo compare una sola volta in riferimento al diametro della sfera. L’espressione “ al quadrato” va però sottintesa anche in relazione al lato dell’ottaedro, perché Euclide sta affermando che il quadrato del diametro della sfera è doppio del quadrato del lato dell’ottaedro, ovvero*
$diametro^2 = 2\ lato\ ottaedro^2$.

Ἐκκείσθω ἡ τῆς δοθείσης σφαίρας διάμετρος ἡ AB[3], καὶ τετμήσθω δίχα κατὰ τὸ Γ, καὶ γεγράφθω ἐπὶ τῆς AB[3] ἡμικύκλιον τὸ AΔB, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ Γ τῇ AB[3] **πρὸς ὀρθὰς**[4] ἡ ΓΔ[3], καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔB[3],

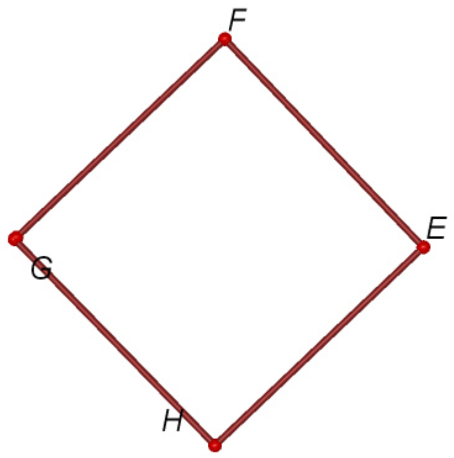
Sia stato fissato il diametro della sfera data AB e sia stato secato a metà secondo C e sia stato tracciato su AB il semicerchio ADB e sia stata condotto da C ad ***angoli retti***[4] *con AB CD e sia stata congiunto DB*



3. *Riferendosi ad AB, CD e DB qui e poi anche in tutta la dimostrazione Euclide utilizza solo l'articolo femminile ἡ, sottintendendo il sostantivo. Quale? Verrebbe da dire "segmento", ma in greco il termine corrispondente, τμῆμα (tmèma), è neutro: se Euclide avesse voluto parlare di segmenti, avrebbe sostantivato AB CD e DB con l'articolo neutro τό. Verrebbe allora da pensare a retta, εὐθεῖα (euthéia), in greco di genere femminile. Ma AB, CD e DB non sono rette. Abbiamo quindi ipotizzato che Euclide intenda semplicemente "linea", "tratto", che in greco corrisponde al femminile γραμμή (grammé). Del resto Euclide utilizza nelle sue costruzioni solo riga e compasso per tracciare linee. Anche noi nel seguire le sue istruzioni abbiamo costruito le immagini che vedete con il programma Cabri 3D che ricorre solo a riga e compasso.*

4. *Quando Euclide scrive "ad angoli retti" (πρὸς ὀρθάς –pròs orthàs-, sottinteso γωνίας –gonìas-, "angoli") noi intendiamo "perpendicolare".*

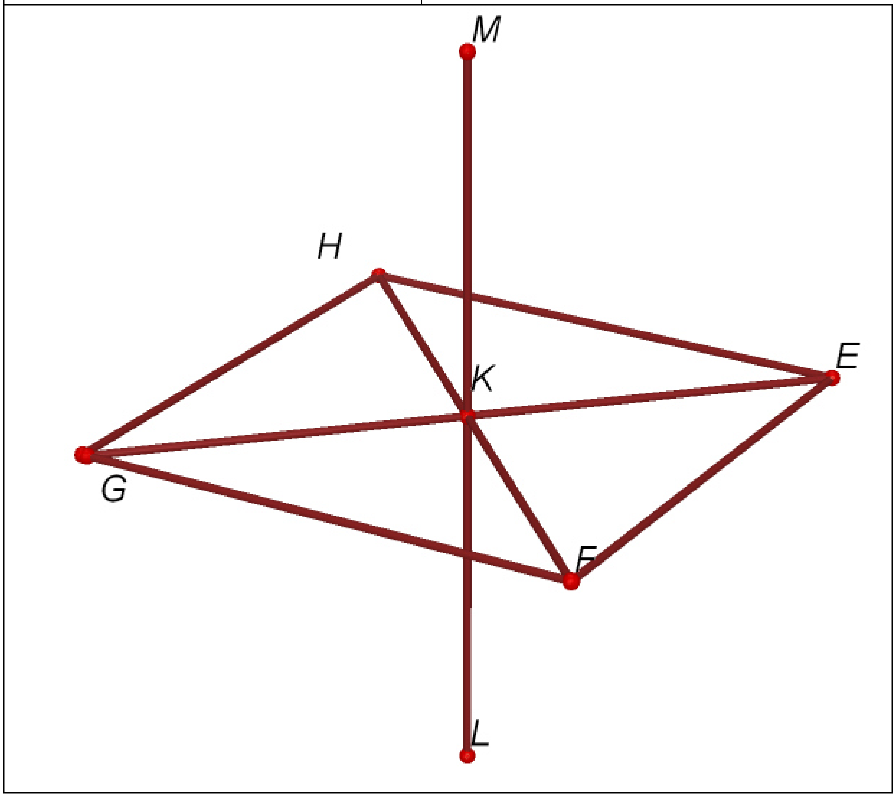
καὶ ἐκκείσθω τετράγωνον τὸ ΕΖΗΘ ἴσην ἔχον ἑκάστην τῶν πλευρῶν τῇ ΑΒ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΘΖ, ΕΗ	*e sia stato fissato il quadrato EFGH avente ciascuno dei lati uguale a DB e siano stati congiunti HF e EG*



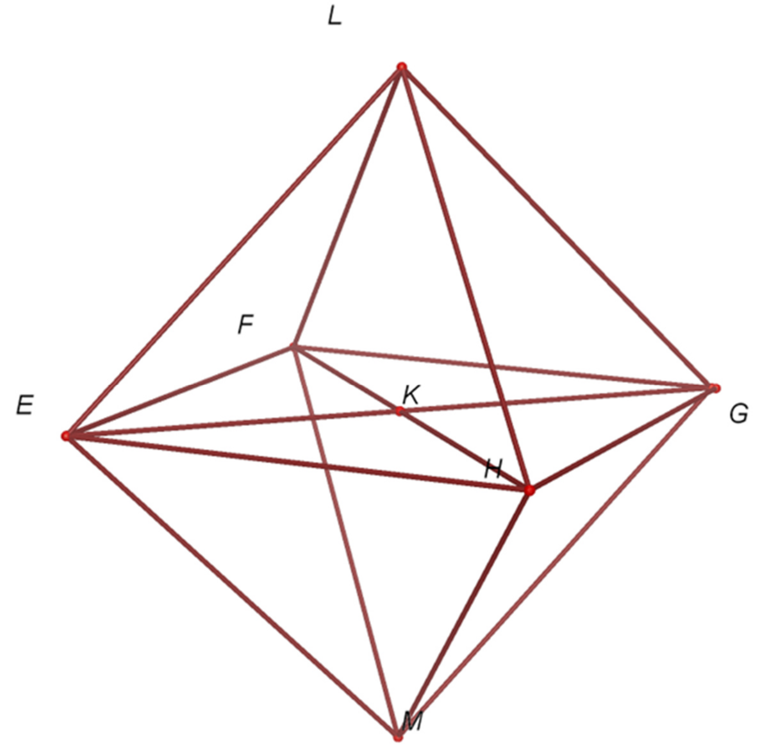
Abbiamo costruito il quadrato come suggerisce Euclide di lato EF=DB

καὶ ἀνεστάτω ἀπὸ τοῦ Κ σημείου τῷ τοῦ ΕΖΗΘ τεραγώνου ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς εὐθεῖα[5] ἡ ΚΛ καὶ διήχθω ἐπὶ τὰ ἕτερα μέρη τοῦ ἐπιπέδου ὡς ἡ ΚΜ, καὶ ἀφῃρήσθω ἀφ' ἑκατεράς τῶν ΚΛ, ΚΜ μιᾷ τῶν ΕΚ, ΖΚ, ΗΚ, ΘΚ ἴση ἑκατέρα τῶν ΚΛ, ΚΜ,	*E sia stata eretta dal punto K ad angoli retti con il piano del quadrato EFGH una retta[5] KL; e sia stata condotta sull'una e sull'altra parte del piano come KM e siano state tolte dall'una e dell'altra parte KL, KM entrambe uguali a uno solo di EK, FK, GK, HK rispettivamente KL, KM*

5. *Stavolta compare il termine retta εὐθεῖα (euthéia) in riferimento a KL : su questa retta Euclide riporta le due " linee" KM e KL indicate solo con l'articolo femminile che sottintende il solito γραμμή (grammé).*



καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΛΕ, ΛΖ, ΛΗ, ΛΘ, ΜΕ, ΜΖ, ΜΗ, ΜΘ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΚΕ τῇ ΚΘ, καί ἐστιν ὀρθὴ ἡ ὑπὸ ΕΚΘ γωνία, τὸ[6] ἄρα ἀπὸ τῆς ΘΕ διπλάσιόν ἐστι τοῦ[6] ἀπὸ τῆς ΕΚ. πάλιν, ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΛΚ τῇ ΚΕ, καί ἐστιν ὀρθὴ ἡ ὑπὸ ΛΚΕ γωνία, τὸ[6] ἄρα ἀπὸ τῆς ΕΛ διπλάσιόν ἐστι τοῦ[6] ἀπὸ ΕΚ. ἐδείχθη δὲ καὶ τὸ[6] ἀπὸ τῆς ΘΕ διπλάσιον τοῦ[6] ἀπὸ τῆς ΕΚ· τὸ[6] ἄρα ἀπὸ τῆς ΛΕ ἴσον ἐστὶ τῷ6 ἀπὸ τῆς ΕΘ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΛΕ τῇ ΕΘ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΛΘ τῇ ΘΕ ἐστιν ἴση· ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΛΕΘ τρίγωνον. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ ἕκαστον τῶν λοιπῶν τριγώνων, ὧν βάσεις μέν εἰσιν αἱ τοῦ ΕΖΗΘ τετραγώνου πλευραί, κορυφαὶ δὲ τὰ ΛΜ σημεῖα, ἰσόπλευρόν ἐστιν· ὀκτάεδρον ἄρα συνέσταται ὑπὸ ὀκτὼ τριγώνων ἰσοπλεύρων περιεχόμενον.	E siano stati congiunti LE, LF, LG, LH, ME, MF, MG, MH. E poiché KE è uguale a KH e l'angolo sotto EKH è retto, dunque il quadrato[6] di HE è il doppio del quadrato[6] di EK. Di nuovo, poiché LK è uguale a KE e l'angolo sotto LKE è retto, dunque il quadrato[6] di EL è il doppio del quadrato[6] di EK. E fu anche dimostrato che il quadrato[6] di HE è doppio del quadrato[6] di EK; e dunque il quadrato[6] di LE è uguale al quadrato[6] di EH: dunque LE è uguale a EH. Per le stesse ragioni anche LH è uguale a HE. Dunque il triangolo LEH è equilatero. E ugualmente dimostreremo che anche ciascuno dei restanti triangoli di cui le basi sono i lati del quadrato EFGH, vertici i punti L M, è equilatero; dunque, è costruito un ottaedro compreso da otto triangoli equilateri.

6. *Nel testo greco si registra solo l'articolo neutro che sostantiva il concetto che segue di volta in volta. Pensiamo che Euclide sottintenda in tutti i casi segnalati il termine greco neutro τετράγωνον (tetràgonon), da intendere "quadrato" nel senso di "superficie". Se questo è vero, visto che EKH è un triangolo rettangolo isoscele di ipotenusa EH, Euclide starebbe citando il noto teorema di Pitagora.*	

COME PROCEDE EUCLIDE PER COSTRUIRE L'OTTAEDRO? (OBIETTIVO I)

Euclide, per indicare le varie tappe della costruzione, rivolgendosi ad un ipotetico interlocutore (allievo?), utilizza le forme verbali dell'imperativo perfetto passivo terza persona singolare o terza plurale.

Eccole:

	Verbo greco	Lettura in italiano	Traduzione in italiano
1	ἐκκείσθω (x2)	*ekkéistho*	sia stato fissato
2	τετμήσθω	*tetméstho*	sia stato secato
3	γεγράφθω	*gegràphtho*	sia stato tracciato
4	ἤχθω	*échtho*	sia stata condotta
5	ἐπεζεύχθω	*epezéuchtho*	sia stata congiunta
	ἐπεζεύχθωσαν (x2 : 3 pl.)	*epezéuchthosan*	siano state congiunte
6	ἀνεστάτω	*anestàto*	sia stata eretta
7	διήχθω	*diéchtho*	sia stata condotta
8	ἀφῃρήσθω	*apheréstho*	sia stata tolta

NB. In italiano traduciamo con il congiuntivo esortativo, giacché l'imperativo terza singolare e terza plurale non esiste nella nostra lingua.

Ma che cos'è il perfetto? Per comprendere appieno il *modus operandi* di Euclide, occorre puntualizzare cosa sia il tempo perfetto in greco, giacché in italiano non c'è. La distinzione fondamentale dei tempi nella lingua greca e nella lingua latina è tra tempo presente, chiamato in latino *infectum*, ovvero letteralmente "non (*in*-) fatto (-*fectum*: da *facio*), non finito", in riferimento all'azione presente che persiste, e il tempo compiuto, chiamato *perfectum*, ovvero "portato a compimento pienamente (*per*-)", da cui l'odierno "perfetto" nel senso di finito (e bene). Sono tempi compiuti in relazione ad azioni terminate il perfetto, che indica un'azione compiuta le cui ricadute sono visibili nel presente, e il piuccheperfetto, in riferimento ad un'azione compiuta nel passato. Quando traduciamo in italiano, in genere rendiamo il primo con un passato prossimo, il secondo con un trapassato prossimo (es. *ho studiato*, quindi andrò bene (ricaduta nel presente); inglese I have studied; *avevo studiato*, quindi sono andato bene (ricaduta nel passato); inglese I had studied).

Perché Euclide impiega l'imperativo al tempo perfetto alla forma passiva?

Perché così ottiene che:

1. Il soggetto è la cosa, il compito che deve essere svolto in relazione all'obiettivo iniziale (espresso all'infinito: costruire e circondare….)

2. Indica che l'azione è compiuta-perfettiva (in contrapposizione all'azione imperfettiva del presente). In altre parole, Euclide già sa che la dimostrazione funzionerà, ma vuole che sia l'interlocutore/allievo a ripercorrere le tappe della costruzione e ad arrivare lui alla corretta conclusione. Il parallelismo con il metodo socratico della maieutica sembra, a questo punto, evidente.

Per approfondire: i tempi verbali in greco *A proposito dei tempi, va ricordato che il tratto fondamentale dei verbi greci, secondo la classificazione degli stoici, non predilige l'opposizione temporale presente, passato e futuro, secondo uno schema aristotelico (cfr. Poetica 20) che si è imposto nel sistema grammaticale odierno, ma si basa sulla distinzione dell'aspetto dell'azione, secondo lo schema seguente:*

A *Tempi determinati*

I durativi (nel presente: presente, nel passato: imperfetto)

II compiuti (nel presente: perfetto, nel passato: piuccheperfetto)

B *Tempi indeterminati (nel futuro: futuro nel passato: aoristo)*

La distinzione tra tempi presente-passato e futuro, che chiameremo platonico-aristotelica, e i durativi-compiuti-indeterminati degli stoici non costituisce tanto o solo una questione grammaticale, ma investe un problema filosofico, ovvero come venga intuito il concetto di tempo. Nello schema aristotelico (e nostro) si predilige il <u>*quando*</u> *un'azione avviene (presente), sia avvenuta (passato) o avverrà (futuro); nella concezione stoica, invece, il tratto fondamentale non è il quando, ma la* <u>*qualità*</u> *dell'azione, fotografata nella sua durata.*

Utile per noi e per gli studenti è stato approfondire la questione leggendo un breve brano tratto da un testo fondamentale del grande studioso Pohlenz: lo riportiamo qui sotto.

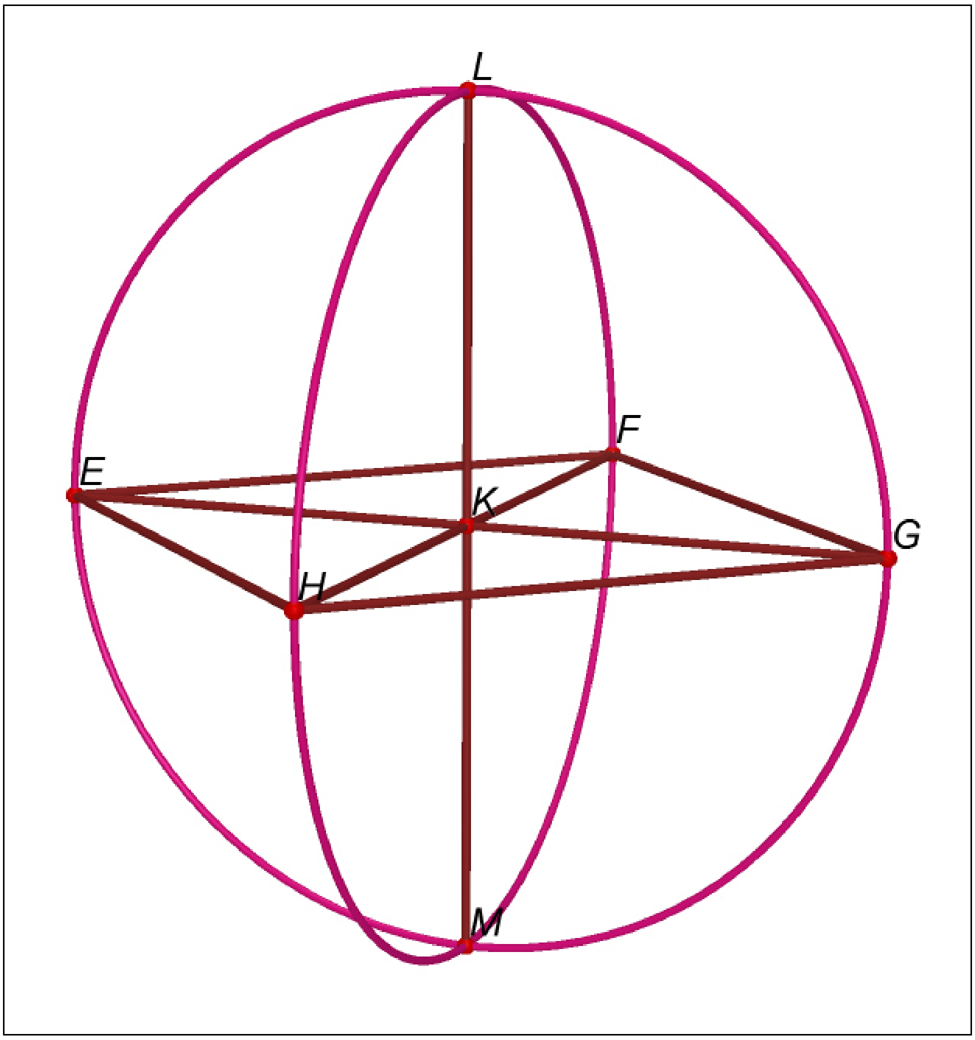
"Platone nel Timeo aveva asserito che il concetto di tempo non trova applicazione alcuna nei confronti dell'essere che rimane eternamente uguale a se stesso, mentre è connesso al movimento del mondo fenomenico, il quale dal corso dei corpi celesti risulta diviso nel "fu", nell'"è" e nel "sarà". Anche per Aristotele il tempo indica il prima o il poi nel movimento del mondo materiale. Sulle loro orme gli Stoici posero il tempo in relazione col movimento, ma per essi assume un particolare significato il definire il tempo una "estensione del movimento". Crisippo riprese da Aristotele anche l'idea che il tempo è un continuum dotato di infinita divisibilità, ma trasse da tale idea la conclusione che noi non potremmo parlare di un "adesso" puntuale, poiché, a ben osservare, questo "adesso" si scinde sempre in un passato e in un futuro. D'altra parte solo del presente noi potremmo dire che lo viviamo come attuale. Crisippo sente quindi il tempo come una corrente da cui noi siamo trasportati con moto uniforme. I tre momenti del tempo fluiscono l'uno nell'altro; l'unica esperienza vissuta da noi è la durata e abbiamo la sensazione di una cesura solo quando un processo o un'azione arriva alla sua conclusione. Pertanto nella teoria dei tempi verbali elaborata dagli Stoici trova espressione non solo una diversa sensibilità linguistica, ma anche una diversa intuizione del tempo. Ciò è in armonia con l'essenza più segreta dello stoicismo. Gli Stoici vivono solo in funzione dei compiti attuali, scaturienti dalla destinazione atemporale dell'uomo. Manca loro il senso della storia, come pure l'interesse per un lontano avvenire" (M. Pohlenz, La Stoa. Storia di un movimento spirituale, Firenze, La Nuova Italia, 1967 (ed. or. 1959, vol. I, pp. 79-80).

E Euclide cosa pensa del tempo, visto l'uso dell'imperativo perfetto? Egli sembra aver fatto propria più la classificazione stoica che non quella aristotelica: del resto lo stoicismo è a lui vicino cronologicamente, giacché Euclide è un contemporanea più anziano di Zenone, il fondatore della scuola stoica.

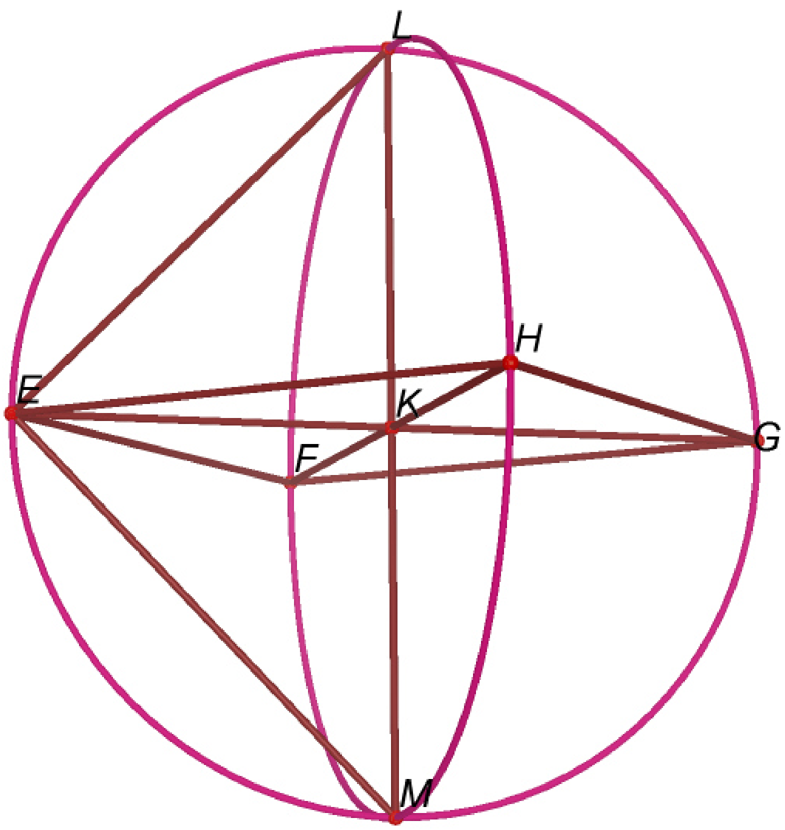
OBIETTIVO II

δεῖ δὴ αὐτὸ καὶ σφαίρᾳ περιλαβεῖν τῇ δοθείσῃ καὶ δεῖξαι, ὅτι ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος δυνάμει διπλασίων ἐστὶ τῆς τοῦ ὀκταέδρου πλευρᾶς.	**Bisogna quindi circondarlo con una sfera data e dimostrare che il diametro della sfera al quadrato è doppio del lato dell’ottaedro al quadrato**

Ἐπεὶ γὰρ αἱ τρεῖς αἱ ΛΚ,ΚΜ,ΚΕ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν, τὸ ἄρα ἐπὶ τῆς ΛΜ γραφόμενον ἡμικύκλιον ἥξει διὰ τοῦ Ε. καὶ διὰ τὰ αὐτά,ἐὰν μενούσης τῆς ΛΜ περιενεχθὲν τὸ ἡμικύκλιον εἰς τὸ αὐτὸ ἀποκατασταθῇ,ὅθεν ἤρξατο φέρεσθαι,ἥξει καὶ διὰ τῶν Ζ,Η,Θ σημείων,καὶ ἔσται σφαίρᾳ περιειλημμένον τὸ ὀκτάεδρον. λέγω δή,ὅτι καὶ τῇ δοθείσῃ.	Infatti, poiché le tre LK, KM, KE sono uguali tra loro, allora il semicerchio disegnato su LM passerà per E; e per le stesse ragioni se, rimanendo fermo LM, il semicerchio ruotato ritorni laddove ha iniziato il giro, passerà anche per i punti F, G, H e l'ottaedro sarà circondato con una sfera. Dico che anche con una (sfera) data (è circondato).



ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ ΛΚ τῇ ΚΜ, κοινὴ δὲ ἡ ΚΕ, καὶ γωνίας ὀρθὰς περιέχουσιν, βάσις ἄρα ἡ ΛΕ βάσει τῇ ΕΜ ἐστιν ἴση. καὶ ἐπεὶ ὀρθή ἐστιν ἡ ὑπὸ ΛΕΜ γωνία· ἐν ἡμικυκλίῳ γάρ· τὸ6 ἄρα ἀπὸ τῆς ΛΜ διπλάσιόν ἐστι τοῦ6 ἀπὸ τῆς ΛΕ.	*Poiché infatti LK è uguale a KM e KE (è in) comune e comprendono angoli retti, ne segue che la base LE sia uguale a quella EM. E, poiché l'angolo sotto LEM è retto, (è) infatti in un semicerchio, allora il quadrato[6] su LM è il doppio del quadrato[6] su LE.*



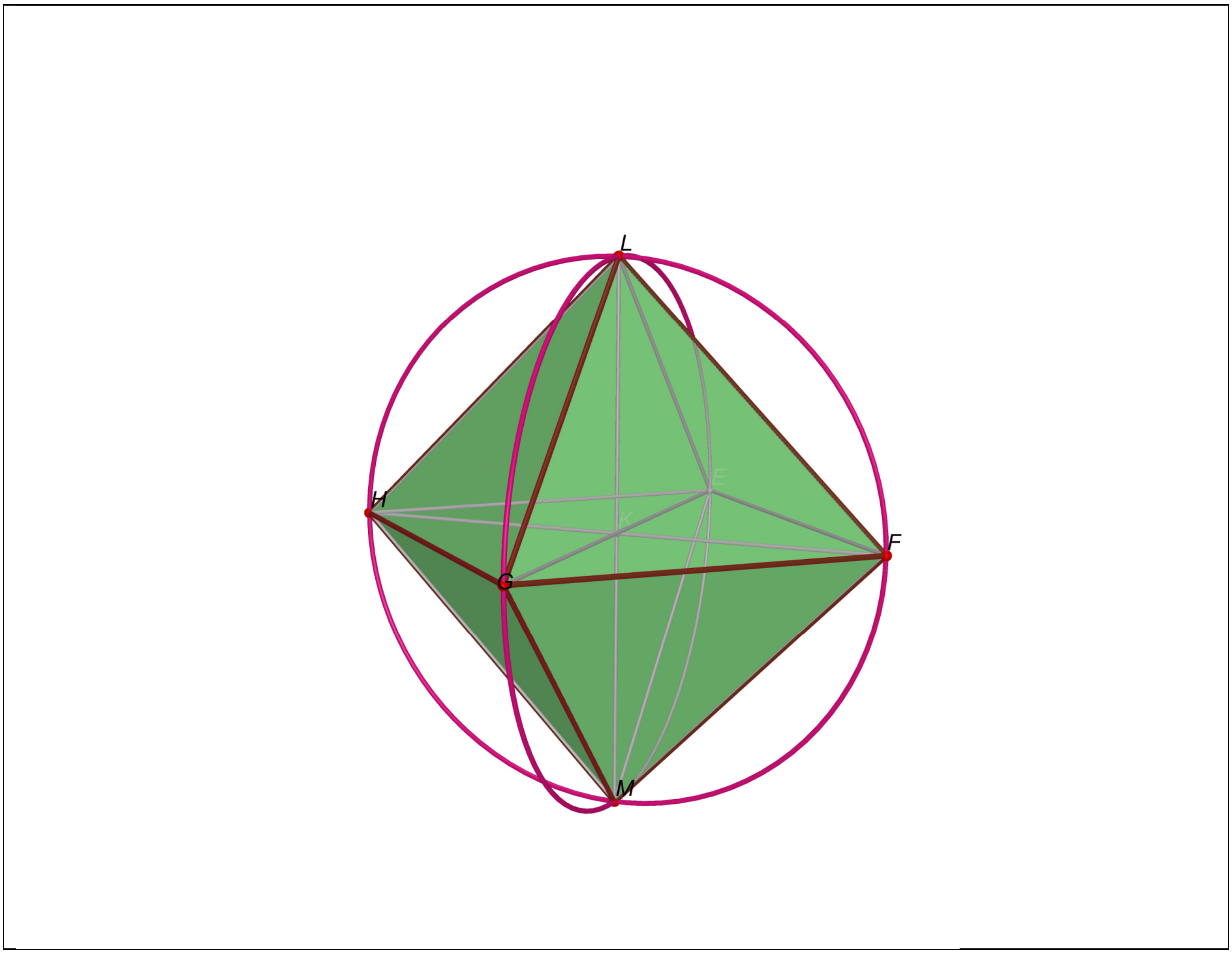
Euclide dimostra che i due triangoli LEK e KEM sono uguali per il primo criterio di uguaglianza e che il triangolo LEK è rettangolo: applica di nuovo il teorema di Pitagora. Euclide cita il teorema secondo il quale ogni triangolo, inscritto in un semicerchio, è rettangolo. In particolare il triangolo LEM considerato è anche isoscele, come il triangolo EKF, per cui ritrova i rapporti tra i quadrati dei lati.

πάλιν, ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΓ τῇ ΓΒ, διπλασία ἐστὶν ἡ ΑΒ τῆς ΒΓ. ὡς δὲ ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΔ· διπλάσιον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τοῦ ἀπὸ τῆς ΒΔ. ἐδείχθη δὲ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΛΜ διπλάσιον τοῦ ἀπὸ τῆς ΛΕ. καί ἐστιν ἴσον τὸ ἀπὸ τῆς ΔΒ τῷ ἀπὸ τῆς ΛΕ· ἴση γὰρ κεῖται ἡ ΕΘ τῇ ΔΒ. ἴσον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τῷ ἀπὸ τῆς ΛΜ· ἴση ἄρα ἡ ΑΒ τῇ ΛΜ. καί ἐστιν ἡ ΑΒ ἡ τῆς δοθείσης σφαίρας διάμετρος· ἡ ΛΜ ἄρα ἴση ἐστὶ τῇ τῆς δοθείσης σφαίρας διαμέτρῳ.	*Di nuovo, poiché AC è uguale a CB, AB è il doppio di BC. E come AB rispetto a BC, così il quadrato[6] su AB rispetto a quello su BD: difatti il quadrato[6] su AB è il doppio di quello su BD. Fu dimostrato anche che il quadrato[6] su LM è il doppio di quello su LE e il quadrato[6] su DB è uguale a quello su LE: infatti EH è uguale a DB. Allora anche il quadrato[6] su AB è uguale a quello su LM: così AB è uguale a LM. E AB è il diametro della sfera data: dunque, LM è uguale al diametro della medesima.*

Ora Euclide vuole dimostrare che il diametro della sfera è quel segmento AB da cui è partito e lo fa dimostrando che il triangolo ABD di partenza ed il triangolo LME dell'ottaedro hanno i lati nella medesima proporzione e poiché il lato dell'ottaedro EF è stato preso uguale al lato DB il diametro della sfera coincide con il segmento AB di partenza e l'ottaedro risulta così circondato da una sfera.

Περιείληπται ἄρα τὸ ὀκτάεδρον τῇ δοθείσῃ σφαίρᾳ. καὶ συναποδέδεικται, ὅτι ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος δυνάμει διπλασίων ἐστὶ τῆς τοῦ ὀκταέδρου πλευρᾶς· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.	L’ottaedro è così circondato dalla sfera data ed è stato dimostrato che il diametro della sfera è doppio al quadrato del lato dell’ottaedro: come volevasi dimostrare.

Euclide costruisce la sfera facendo ruotare un semicerchio intorno al suo diametro fino a ritornare alla posizione di partenza, come già indicato all’inizio del libro XI dei suoi “Elementi”.



"COME PROCEDE EUCLIDE PER CIRCONDARE L'OTTAEDRO CON UNA SFERA? (OBIETTIVO II)

A questo punto, Euclide cambia modo di procedere: il ragionamento si snoda in una serie di proposizioni all'indicativo che si possono schematizzare "poiché x è in un dato modo, ne consegue che anche y sarà ….", in cui ogni conseguenza costituisce l'assunto della proposizione successiva, fino al conclusivo, topico, "come volevasi dimostrare". Tale andamento ricorda il procedere del ragionamento filosofico del sorite, una sorta di sillogismo imperfetto, in cui si susseguono periodi bipartiti in premessa-conseguenza e in cui la conseguenza dell'affermazione precedente diventa la premessa della successiva. Se ne può ricavare che, mentre per la costruzione materiale, Euclide vuole accompagnare il disegno delle singole fasi (vd. uso dell'imperativo), per iscrivere la figura nella sfera data e ragionare sul suo diametro procede più rapidamente, servendosi di un andamento binario in cui la prima parte del ragionamento comporta una conseguenza necessaria che non abbisogna di alcuna dimostrazione.

Per approfondire il sorite in Euclide rimandiamo al nostro lavoro dell'a.s. 2014-2015.