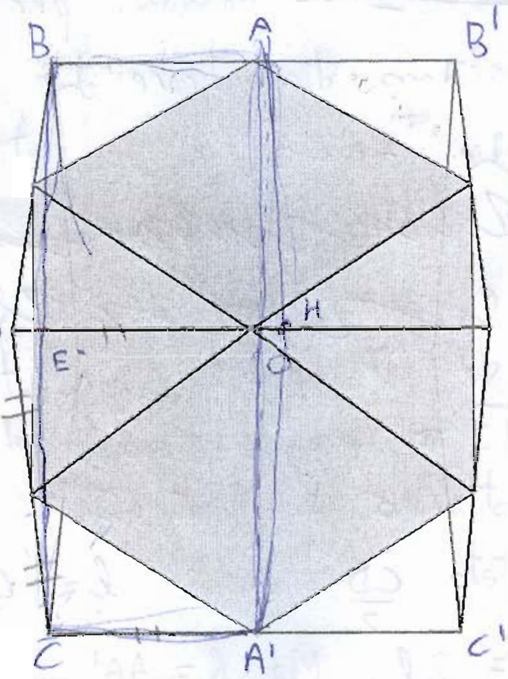
DOMANDA 12

Consideriamo un cubo e gli tronchiamo i vertici per mezzo di piani passanti per i punti medi degli spigoli (vedere la figura). Otteniamo un poliedro che viene chiamato cubottaedro. Esso ha come facce triangoli equilateri e quadrati.



Quale è il rapporto tra il raggio della sfera circoscritta al cubottaedro e la lunghezza di uno spigolo del cubottaedro?

Consideriamo la diagonale del cubottaedro AA'. Considerando il ~~raggio~~ centro O della sfera circoscritta al cubottaedro abbiamo $AO = OA' = R$.

Essendo AA' diametro della sfera circoscritta $\frac{AA'}{2} = R$, ~~dove~~ con R raggio della sfera circoscritta. Osserviamo che AA' è anche il segmento che unisce i punti medi di due spigoli opposti del cubo da cui abbiamo ottenuto il cubottaedro. ~~Rendiamo il quadrato~~ Definiamo tali spigoli BB' e CC' con B' e C' sulla stessa faccia del cubo, così come B e C. Poiché $AB = A'C$ abbiamo che $AA' /\!/ BC$;

~~Inoltre in ogni cubo uno spigolo è perpendicolare alle due facce opposte a cui appartengono i suoi vertici, quindi ed è~~

~~Osserviamo che le due facce del cubo a cui appartiene lo spigolo essendo quadrati, hanno l'angolo in C di 90°~~ le ~~CC', essendo perpendicolare a due degli spigoli della faccia~~

Osserviamo che $CC' \perp CD$ (in quanto ogni faccia del cubo è un quadrato) e $CC' \perp CE$, da cui, per le condizioni di perpendicolarità di una retta al piano, abbiamo che CC' è perpendicolare alla faccia $BDCE$ (porzione di piano a cui appartengono sia il segmento CE, che il segmento CD), in quanto perpendicolare a due delle rette che giacciono su tale porzione di piano e si intersecano nel punto C. Ma allora CC' è perpendicolare a tutte le rette appartenenti a tale piano e ~~quindi $CC' \perp BC$~~ passanti per C, quindi $CC' \perp BC$.

Analogamente possiamo dimostrare che $BB' \perp BC$.

Abbiamo quindi che $AA'CB$ è un rettangolo, avendo un angolo di $90°$ ~~coppie di lati paralleli~~ ~~una coppia di lati paralleli congruenti~~ e ~~una coppia di lati opposti congruenti~~ e una coppia di lati opposti congruenti. Quindi $BC \cong AA'$.

Ma $BC = CD\sqrt{2}$ essendo diagonale del quadrato di lato CD.

Il lato l del cubottaedro è l'ipotenusa di un triangolo rettangolo isoscele con cateto $\frac{CD}{2}$ quindi $l = \frac{CD\sqrt{2}}{2}$ e $CD = l\sqrt{2}$ da cui $BC = 2l$. Ma $R = \frac{AA'}{2} = \frac{BC}{2} = l$, da cui il rapporto $\frac{R}{l} = 1$