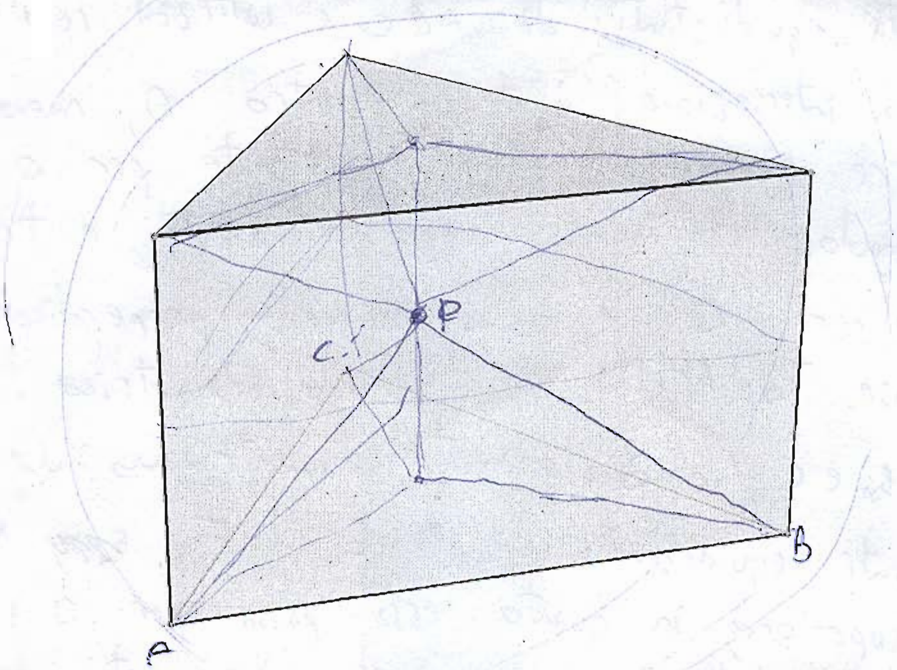
DOMANDA 28



Un prisma avente come base un triangolo equilatero e come lati rettangoli è inscrivibile in una sfera?

Se sì, quale è il suo centro? Quanto misura il raggio?

- Metodo empirico: prendere P_* punto medio del segmento GG' con G ortocentro del triangolo ABC, base del prisma e G' ortocentro del triangolo $A'B'C'$, altra base del prisma. Dimostrare che $PA \cong PB \cong PC \cong PA' \cong PB' \cong PC'$
- Metodo sintetico: definire il luogo geometrico dei punti equidistanti da due punti A, B come un piano perpendicolare al segmento AB e passante per il suo punto medio. Osservare che applicando tale metodo prendendo tutte le coppie di punti AB, BC, $A'C$ ecc. l'unico punto in comune è P.
- Metodo analitico: Trovare un punto $P(x_P; y_P; z_P)$ equidistante da A, B, C, A', B'_* e C' con la formula $\overline{AP} = \sqrt{(x_P-x_A)^2+(y_P-y_A)^2+(z_P-z_A)^2}$

Consideriamo il triangolo di base ABC: il luogo geometrico dei punti equidistanti da A e da B è un piano perpendicolare al segmento AB e passante per il suo punto medio. Osserviamo che ~~tale piano~~ l'intersezione di tale piano con il triangolo è ~~una~~ l'altezza relativa ad AB, l'intersezione del piano di punti equidistanti da B e C è l'altezza relativa a BC e quello dei punti equidistanti da A e C è l'altezza relativa ad AC.

La loro intersezione è il circocentro O, mentre l'intersezione dei tre piani sarà la retta passante per O e perpendicolare al triangolo. Infatti essa appartiene a tutti e tre i piani, che passano per O e sono anch'essi perpendicolari al triangolo di base. Tale retta è il luogo geometrico di punti equidistanti da A, B e C, e analogamente dimostriamo che essa è il luogo dei punti equidistanti da D, E ed F, ~~spig~~ vertici della base superiore, in quanto essa passa per O e O' (con O' circocentro della base superiore). Se esiste un circocentro del prisma, e quindi un punto da cui ~~ciascuno~~ tutti ~~dei~~ i vertici sono equidistanti fra loro si deve obbligatoriamente trovare su questa retta. Calcolando la distanza di un punto P della retta da A, usando Pitagora, si ottiene $\overline{AO}^2 + \overline{PO}^2 = \overline{AP}^2 = \overline{BP}^2 = \overline{CP}^2$; Calcolando analogamente la distanza di P dai vertici D, E e F si ha

$$\overline{DO'}^2 + \overline{PO'}^2 = \overline{DP}^2 = \overline{EP}^2 = \overline{FP}^2$$

Ponendo $\overline{DP} = \overline{AP}$ si ha $\overline{DO'}^2 + \overline{PO'}^2 = \overline{AO}^2 + \overline{PO}^2$

Ma osserviamo che se l è il lato del triangolo equilatero nelle due basi, $\overline{AO} = \frac{l\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{l\sqrt{3}}{3} = \overline{DO'}$ e quindi l'equazione precedente è verificata solo se $\overline{PO'}^2 = \overline{PO}^2$ e quindi $\overline{PO'} = \overline{PO}$ e P è il punto medio del segmento $\overline{OO'}$. Esiste un ~~ortocentro~~ circocentro e quindi anche una sfera circoscritta. Il raggio sarà (dicendo h l'altezza e l lo spigolo di base) ~~$\overline{PO}$~~ $r = \overline{AP} = \sqrt{\overline{PO}^2 + \overline{AO}^2} =$

$$= \sqrt{\frac{h^2}{4} + \frac{l^2}{3}}$$

(PO è $\frac{h}{2}$ essendo P punto medio del segmento OO', che è anche un'altezza)