EUCLIDE COSTRUISCE CON RIGA E COMPASSO L'ICOSAEDRO

(studenti e professori del Liceo Classico Tacito)

Riccardo Crisà

Bianca Diterlizzi

Giulia Giannini

Sophia Remondina

Luciana Elena Scala

Prof.ssa Gioia Battilomo

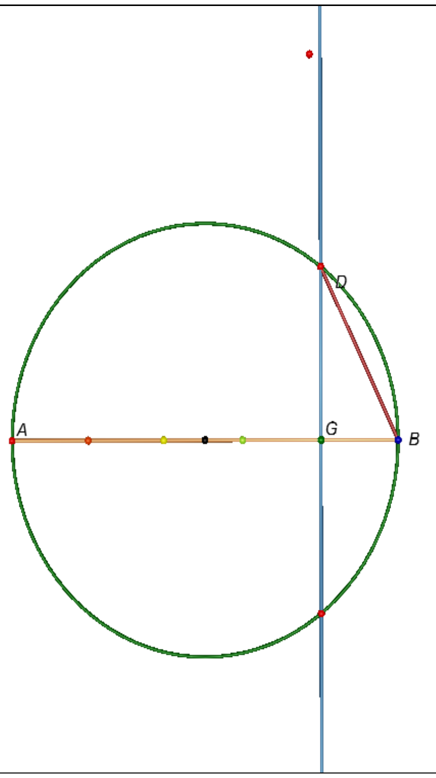
Prof.ssa Valentina Raimondi

OBIETTIVO I

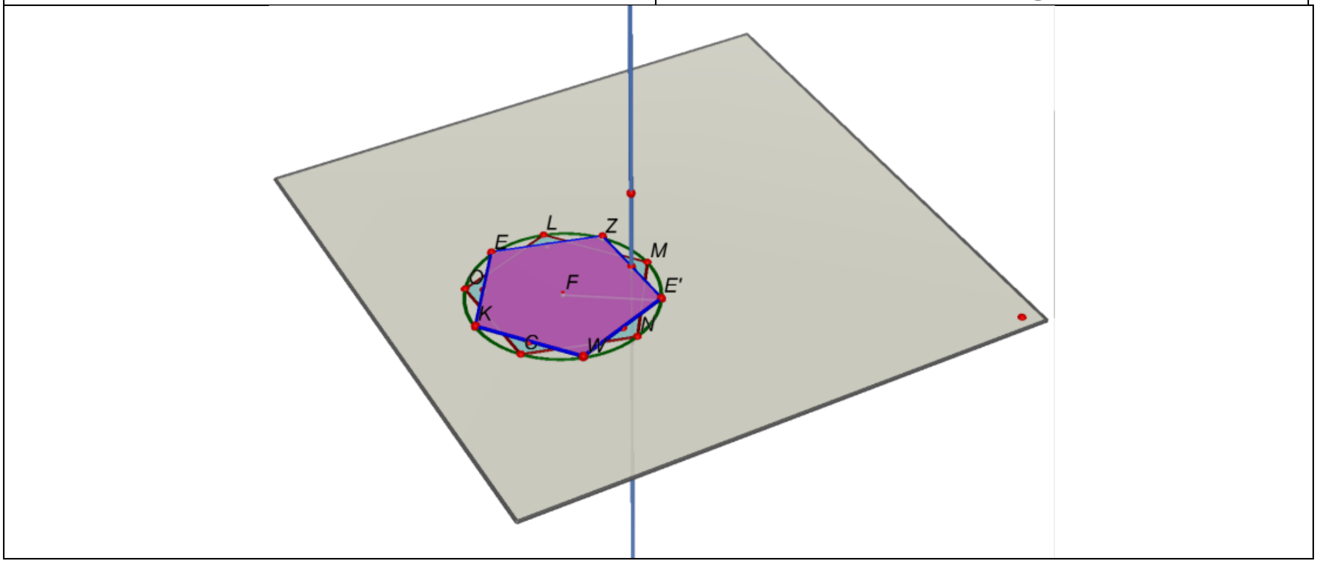
εἰκοσάεδρον συστήσασθαι καὶ σφαίρᾳ περιλαβεῖν, ᾗ καὶ τὰ προειρημένα σχήματα, καὶ δεῖξαι, ὅτι ἡ τοῦ εἰκοσαέδρου πλευρὰ ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ἐλάττων.	Costruire un icosaedro e iscriverlo in una sfera, in cui (possano iscriversi) anche le predette figure, e dimostrare che il lato dell'icosaedro è irrazionale quello chiamato minore.

Euclide dichiara da subito lo scopo del suo lavoro cioè come costruire un icosaedro a partire da un assegnato segmento AB, dimostrare che tale icosaedro è inscrivibile in una sfera di diametro giusto quel segmento AB inizialmente assegnato e quindi verificare che il lato DB dell'icosaedro è "l'irrazionale minore" con questo termine Euclide ha precedentemente definito un segmento DB costruito a partire da un altro AB in modo che risulti $DB^2 = \frac{AB^2}{5}$ *. Ora illustreremo come Euclide svilupperà il suo pensiero.*

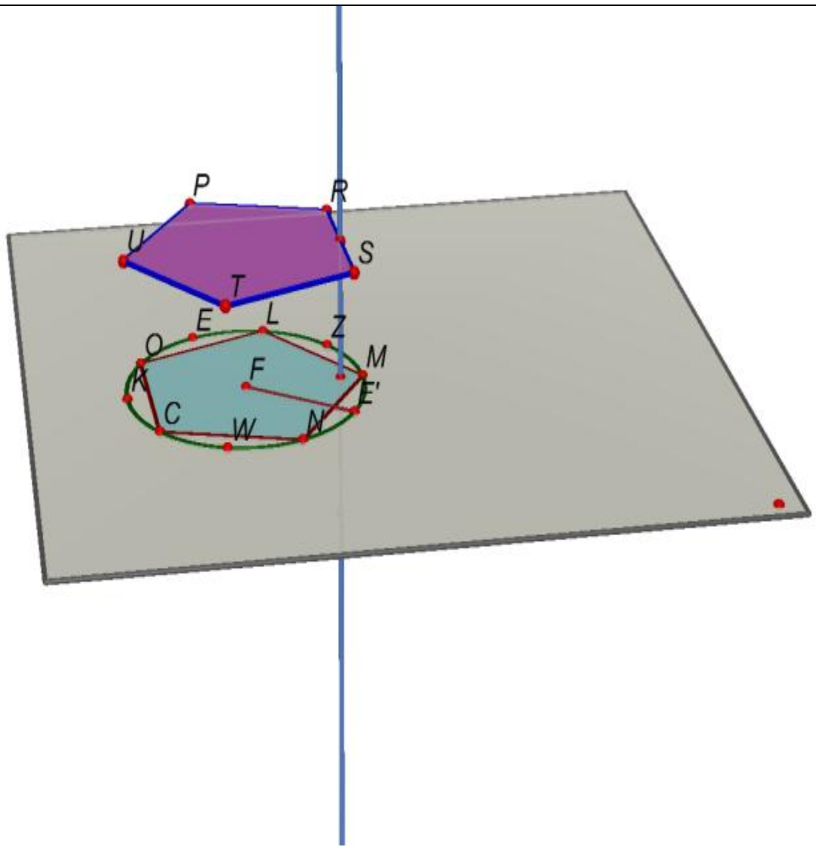
Va inoltre precisato che Euclide nelle pagine precedenti ha già inscritto nella sfera assegnata un tetraedro regolare (prop. 13), un ottaedro regolare (prop. 14) e un cubo (prop. 15) e nelle successive inscriverà un dodecaedro (prop. 17), completando così l'inscrizione di tutte e cinque i poliedri platonici in una sfera.

Ἐκκείσθω ἡ τῆς δοθείσης σφαίρας διάμετρος ἡ ΑΒ καὶ τετμήσθω κατὰ τὸ Γ ὥστε τετραπλῆν εἶναι τὴν ΑΓ τῆς ΓΒ, καὶ γεγράφθω ἐπὶ τῆς ΑΒ ἡμικύκλιον τὸ ΑΔΒ, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ Γ τῇ ΑΒ πρὸς ὀρθὰς γωνίας εὐθεῖα γραμμὴ ἡ ΓΔ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔΒ, καὶ ἐκκείσθω κύκλος ὁ ΕΖΗΘΚ, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἔστω τῇ ΔΒ	Sia stato fissato il diametro delle sfera data AB e sia secato secondo G cosicché AG sia il quadruplo di GB e sia tracciato il semicerchio ADB su AB e sia tirata su da G la retta GD perpendicolare a AB [sia condotta da G a AB secondo angoli retti una linea retta GD] e sia congiunta DB.
	*Applicando il primo teorema di Euclide al triangolo dato possiamo affermare che* $DB^{\ 2} = AB\ \ GB\ \ ora$ $GB = \frac{AB}{5}$ *ne segue che* $DB^2 = \frac{AB^2}{5}$ *ovvero che* $AB^2 = 5\ DB^2$ *(questa relazione ci servirà per concludere la dimostrazione). Euclide si è così costruito il segmento AB con cui costruirà l'icosaedro.*

καὶ ἐγγεγράφθω είς τὸν ΕΖΗΘΚ κύκλον πεντάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον τὸ ΕΖΗΘΚ, καὶ τετμήσθωσαν αἱ ΕΖ, ΖΗ, ΗΘ, ΘΚ, ΚΕ περιφέρειαι δίχα κατὰ τὰ Λ, Μ, Ν, Ξ, Ο σημεῖα, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΛΜ, ΜΝ, ΝΞ, ΞΟ, ΟΛ, ΕΟ. ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ΛΜΝΞΟ πεντάγωνον, καὶ δεκαγώνου ἡ ΕΟ εὐθεῖα.	e sia fissato il cerchio EZE'WK il cui raggio sia uguale a DB e sia iscritto nel cerchio EZE'WK il pentagono equilatero e equiangolo EZE'WK e siano secati gli archi EZ, ZE', E'W, WK, KE a metà nei punti L, M, N, C, O e siano congiunti [i punti medi degli archi] LM, MN, NC, CO, OL, EO Quindi anche il pentagono LMNCO = è equilatero e la retta EO è [il lato]del decagono.

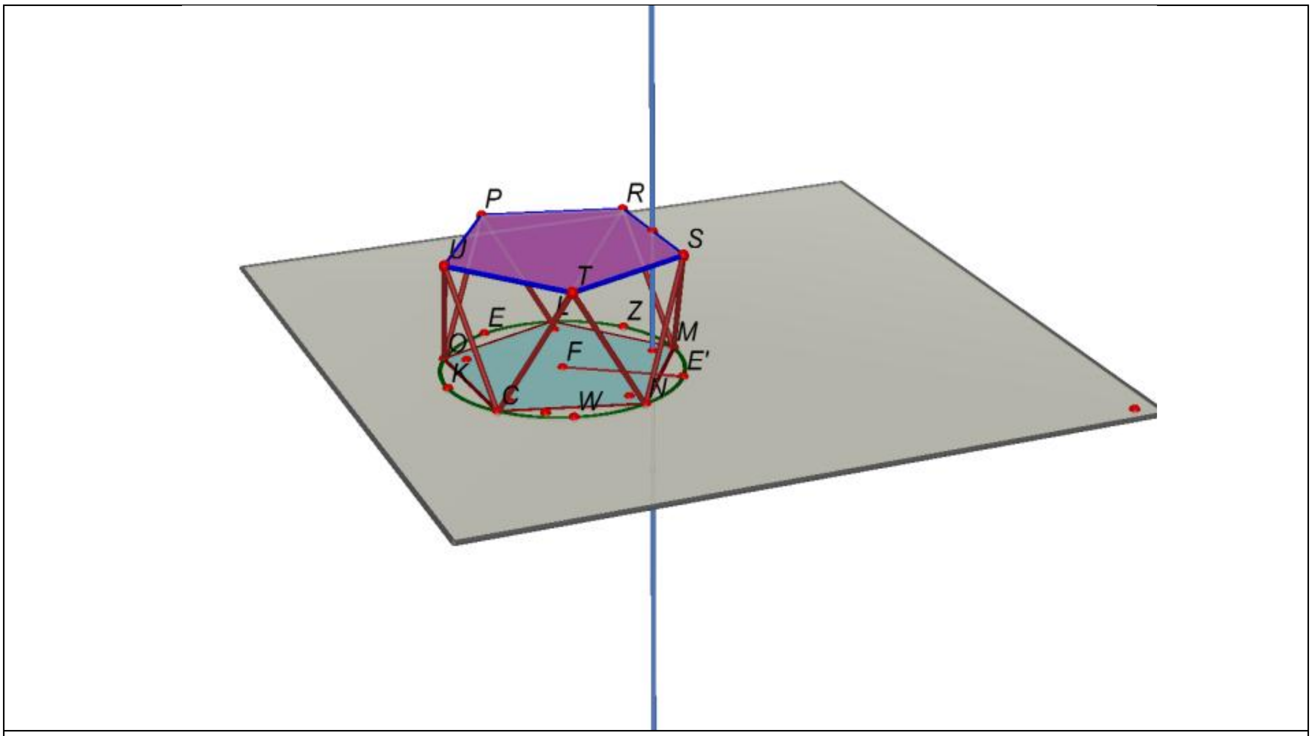


καὶ ἀνεστάτωσαν ἀπὸ τῶν Ε, Ζ, Η, Θ, Κ σημείων τῷ τοῦ κύκλου ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς γωνίας εὐθεῖαι αἱ ΕΠ, ΖΡ, ΗΣ, ΘΤ, ΚΥ ἴσαι οὖσαι τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ΕΖΗΘΚ κύκλου, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΠΡ, ΡΣ, ΣΤ, ΤΥ, ΥΠ, ΠΛ, ΛΡ, ΡΜ, ΜΣ, ΣΝ, ΝΤ, ΤΞ, ΞΥ, ΥΟ, ΟΠ. καὶ ἐπεὶ ἑκατέρα τῶν ΕΠ, ΚΥ τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστιν, παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΠ τῇ ΚΥ. ἔστι δὲ αὐτῇ καὶ ἴση: αἱ δὲ τὰς ἴσας τε καὶ παραλλήλους ἐπιζευγνύουσαι ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη εὐθεῖαι ἴσαι τε καὶ παράλληλοί εἰσιν. ἡ ΠΥ ἄρα τῇ ΕΚ ἴση τε καὶ παράλληλός ἐστιν. πενταγώνου δὲ ἰσοπλεύρου ἡ ΕΚ: πενταγώνου ἄρα ἰσοπλεύρου καὶ ἡ ΠΥ τοῦ εἰς τὸν ΕΖΗΘΚ κύκλον ἐγγραφομένου. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἑκάστη τῶν ΠΡ, ΡΣ, ΣΤ, ΤΥ πενταγώνου ἐστὶν ἰσοπλεύρου τοῦ εἰς τὸν ΕΖΗΘΚ κύκλον ἐγγραφομένου: ἰσόπλευρον ἄρα τὸ ΠΡΣΤΥ πεντάγωνον.	E siano erette dai punti E, Z, E’, W, K ad angoli retti con il piano del cerchio (le perpendicolari al piano del cerchio) le rette EP, ZR, E’S, WT, KU che sono uguali al raggio del cerchio EZE’WK , e siano congiunte (le rette) PR, RS, ST, TU, UP, PL, LR, RM, MS, SN, NT, TC, CU, UO, OP. E poiché l’una e l’altra delle (rette) EP, KU è perpendicolare (lett. ad angoli retti) rispetto al piano stesso, dunque EP è parallelo a KU. D’altra parte è anche uguale a questa. Le rette che congiungono dalla stessa parte quelle uguali e parallele sono sia uguali che parallele. Quindi PU è uguale e parallela a EK; ed EK è [lato] di un pentagono equilatero; e quindi anche PU è [lato] del pentagono equilatero inscritto nel cerchio EZE’WK: dunque il pentagono PRSTU è equilatero.



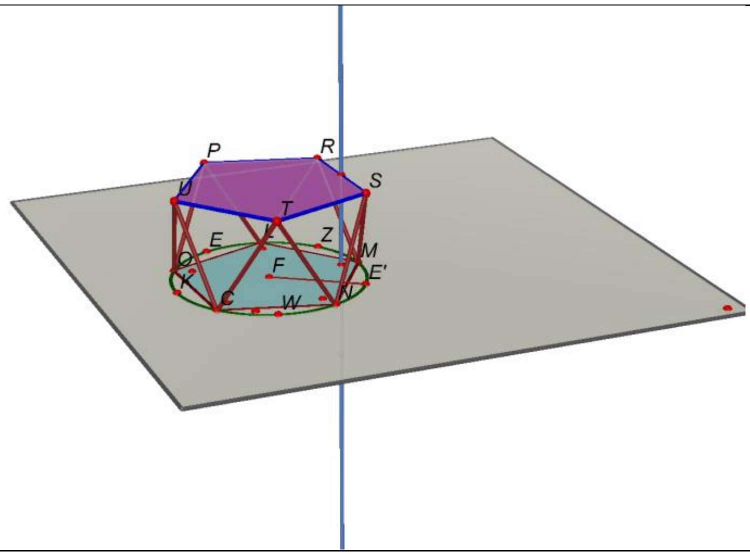
Euclide quindi osserva che il pentagono “in alto” è esattamente uguale a quello in basso perché ottenuto (diremo oggi) per proiezione infatti alza dai vertici delle rette perpendicolari. Ora considererà il solido che ha come base il pentagono “ruotato” e superiormente il pentagono “proiettato”

καὶ ἐπεὶ ἑξαγώνου μέν ἐστιν ἡ ΠΕ, δεκαγώνου δὲ ἡ ΕΟ, καί ἐστιν ὀρθὴ ἡ ὑπὸ ΠΕΟ, πενταγώνου ἄρα ἐστὶν ἡ ΠΟ: ἡ γὰρ τοῦ πενταγώνου πλευρὰ δύναται τήν τε τοῦ ἑξαγώνου καὶ τὴν τοῦ δεκαγώνου τῶν εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἐγγραφομένων.	E poiché PE è [lato] dell’esagono, EO del decagono e quello sotto (l’angolo) PEO è retto, allora PO è [lato] del pentagono; infatti il lato del pentagono è il quadrato (lett. può) sia [del lato] dell’esagono sia del decagono inscritti nello stesso cerchio.
διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΟΥ πενταγώνου ἐστὶ πλευρά. ἔστι δὲ καὶ ἡ ΠΥ πενταγώνου: ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΠΟΥ τρίγωνον.	Per queste ragioni certamente anche OU è lato del pentagono. E anche PU è [lato] del pentagono e quindi anche il triangolo POU è equilatero.

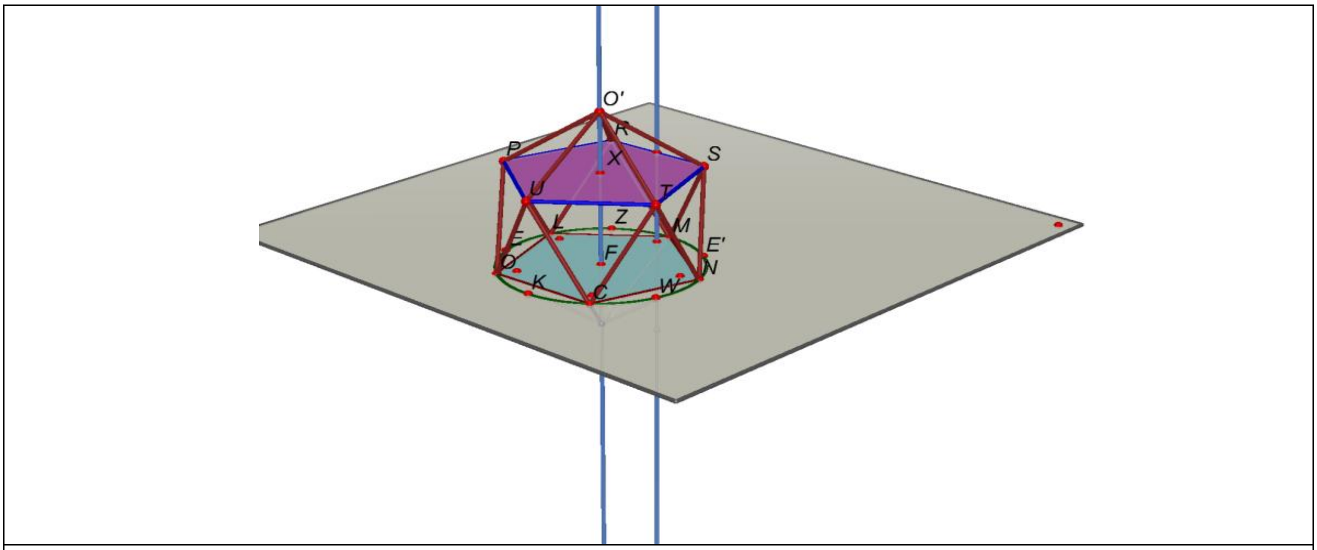


Premettiamo che indicheremo con l_6 il lato dell’esagono iscritto in un cerchio, cioè il raggio del cerchio stesso, con l_5 il lato del pentagono e con l_{10} il lato del decagono inscritti nello stesso cerchio e precisiamo che

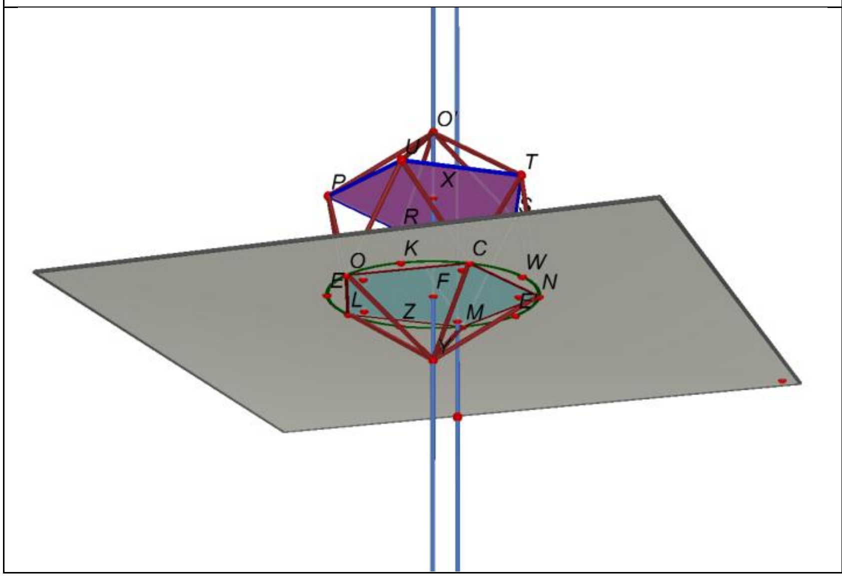
In questo passo Euclide sta citando un teorema (prop 10 libro XIII) che ha precedente dimostrato il quale afferma, in linguaggio moderno, che i tre lati l_6, l_5 ed l_{10} costituiscono una terna pitagorica e con questo osserva che unendo i vertici del pentagono in alto PRSTU con quelli del pentagono in basso (quello ruotato LMNCO) , ottiene tutti segmenti l_5 in quanto tali segmenti sono le ipotenuse di triangoli con cateti l_{10} (presi sulla base pentagonale minore o maggiore) e l_6 l’altezza del poliedro così costruito.

<table>
<tr>
<td>διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἕκαστον τῶν ΠΛΡ, ΡΜΣ, ΣΝΤ, ΤΞΥ ἰσόπλευρόν ἐστιν. καὶ ἐπεὶ πενταγώνου ἐδείχθη ἑκατέρα τῶν ΠΛ, ΠΟ, ἔστι δὲ καὶ ἡ ΛΟ πενταγώνου, ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΠΛΟ τρίγωνον. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἕκαστον τῶν ΛΡΜ, ΜΣΝ, ΝΤΞ, ΞΥΟ τριγώνων ἰσόπλευρόν ἐστιν.</td>
<td>Per queste stesse ragioni ognuno dei (triangoli) PLR, RMS, SNT, TCU è equilatero. E poiché l’uno e l’altro delle PL e PO sono stati dimostrati (essere lati) di un pentagono e anche LO è [lato] di un pentagono, allora il triangolo PLO è equilatero. Per le stesse ragioni ciascuno (dei triangoli) LPM, MSN, NTC, CUO è certamente equilatero.</td>
</tr>
<tr>
<td>
</td>
<td>Così osserva che i 10 triangoli che diremo equatoriali sono tutti equilateri e tutti di lato l_5.</td>
</tr>
</table>

εἰλήφθω τὸ κέντρον τοῦ ΕΖΗ ΘΚ κύκλου τὸ Φ σημεῖον: καὶ ἀπὸ τοῦ Φ τῷ τοῦ κύκλου ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἀνεστάτω ἡ ΦΩ, καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὰ ἕτερα μέρη ὡς ἡ ΦΨ, καὶ ἀφῃρήσθω ἑξαγώνου μὲν ἡ ΦΧ, δεκαγώνου δὲ ἑκατέρα τῶν ΦΨ, ΧΩ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΠΩ, ΠΧ, ΥΩ, ΕΦ, ΛΦ, ΛΨ, ΨΜ. καὶ ἐπεὶ ἑκατέρα τῶν ΦΧ, ΠΕ τῷ τοῦ κύκλου ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστιν, παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΦΧ τῇ ΠΕ. εἰσὶ δὲ καὶ ἴσαι: καὶ αἱ ΕΦ, ΠΧ ἄρα ἴσαι τε καὶ παράλληλοί εἰσιν. ἑξαγώνου δὲ ἡ ΕΦ: ἑξαγώνου ἄρα καὶ ἡ ΠΧ. καὶ ἐπεὶ ἑξαγώνου μέν ἐστιν ἡ ΠΧ, δεκαγώνου δὲ ἡ ΧΩ, καὶ ὀρθή ἐστιν ἡ ὑπὸ ΠΧΩ γωνία, πενταγώνου ἄρα ἐστὶν ἡ ΠΩ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΥΩ πενταγώνου ἐστίν, ἐπειδήπερ, ἐὰν ἐπιζεύξωμεν τὰς ΦΚ, ΧΥ, ἴσαι καὶ ἀπεναντίον ἔσονται, καί ἐστιν ἡ ΦΚ ἐκ τοῦ κέντρου οὖσα ἑξαγώνου: ἑξαγώνου ἄρα καὶ ἡ ΧΥ. δεκαγώνου δὲ ἡ ΧΩ, καὶ ὀρθὴ ἡ ὑπὸ ΥΧΩ: πενταγώνου ἄρα ἡ ΥΩ. ἔστι δὲ καὶ ἡ ΠΥ πενταγώνου: ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΠΥΩ τρίγωνον. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἕκαστον τῶν λοιπῶν τριγώνων, ὧν βάσεις μέν εἰσιν αἱ ΠΡ, ΡΣ, ΣΤ, ΤΥ εὐθεῖαι, κορυφὴ δὲ τὸ Ω σημεῖον, ἰσόπλευρόν ἐστιν.	Sia stato preso il centro del cerchio EZE’WK, il punto F; e da F ad angoli retti con il piano del cerchio si innalzi FO’ e si prolunghi dall’altra parte come FY e sia sottratta FX, [lato] dell’esagono e l’una e l’altra FY e XO’, [lati] di un decagono e siano congiunte PO’, PX, UO, EF, LF, LY, YM. E poiché l’una e l’altra di FX e PE è ad angoli retti con il piano del cerchio, allora FX è parallela a PE: anche EF e PX sono uguali e parallele. Ed EF è [lato] di un esagono e dunque lo è (lato di un esagono) anche PX. E poiché PX è [lato] di un esagono, XO’ di un decagono e è retto l’angolo sotto PXO’, allora PO’ è [lato] di un pentagono. Per le stesse ragioni anche UO’ è [lato] di un pentagono, visto che, se congiungiamo FK e KY, saranno uguali e opposte, e FK, che è il raggio, [lato] di un esagono: anche XU quindi è [lato] di un esagono, e XO’ di un decagono ed è retto l’angolo sotto UXO’: dunque UO’ è [lato] di un pentagono. E anche PU è [lato] di un pentagono: quindi il triangolo PUO’ è equilatero. Per le stesse ragioni anche ognuno dei restanti triangoli, di cui le basi sono le rette PR, RS, ST, TU, vertice il punto O’, è equilatero.



Euclide completa la costruzione dell'icosaedro costruendo sulla base superiore dell'antiprisma una "piramide" a base esagonale ed altezza l_{10} ed usando il solito teorema della terna pitagorica(prop 10 libro XIII) osserva che gli spigoli di tale piramide sono lunghi esattamente l_5, quindi tutte le cinque facce della piramide sono triangoli equilateri di lato l_5.

πάλιν, ἐπεὶ ἐξαγώνου μὲν ἡ ΦΛ, δεκαγώνου δὲ ἡ ΦΨ, καὶ ὀρθή ἐστιν ἡ ὑπὸ ΛΦΨ γωνία, πενταγώνου ἄρα ἐστὶν ἡ ΛΨ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ἐὰν ἐπιζεύξωμεν τὴν ΜΦ οὖσαν ἐξαγώνου, συνάγεται καὶ ἡ ΜΨ πενταγώνου. ἔστι δὲ καὶ ἡ ΛΜ πενταγώνου: ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΛΜΨ τρίγωνον. ὁμοίως δὴ δειχθήσεται, ὅτι καὶ ἕκαστον τῶν λοιπῶν τριγώνων, ὧν βάσεις μέν εἰσιν αἱ ΜΝ, ΝΞ, ΞΟ, ΟΛ, κορυφὴ δὲ τὸ Ψ σημεῖον, ἰσόπλευρόν ἐστιν. συνέσταται ἄρα εἰκοσάεδρον ὑπὸ εἴκοσι τριγώνων ἰσοπλεύρων περιεχόμενον.	Di nuovo, poiché FL è [lato] di un esagono, FY di un decagono e l'angolo sotto LFY è retto, dunque anche LY è [lato] di un pentagono. Per gli stessi motivi qualora congiungiamo MF, che è [lato] di un esagono, ne deriva che anche MY è [lato] di un pentagono ed anche LM [lato] di un pentagono: dunque il triangolo LMY è equilatero. Ugualmente sarà dimostrato che anche ognuno dei restanti triangoli, di cui le basi sono MN, NC, CO, OL, vertice il punto Y, è equilatero. E' costruito dunque un icosaedro compreso (composto) da venti triangoli equilateri.
	*In modo analogo a prima, ora costruisce la piramide sulla base inferiore ed osserva che anche questa ha come facce cinque triangoli equilateri di lato l_5.*

OBIETTIVO II

δεῖ δὴ αὐτὸ καὶ σφαίρᾳ περιλαβεῖν τῇ δοθείσῃ καὶ δεῖξαι, ὅτι ἡ τοῦ εἰκοσαέδρου πλευρὰ ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ἐλάσσων.	Bisogna anche circondare questo (l'icosaedro) con una sfera data e dimostrare che il lato dell'icosaedro è irrazionale, quello chiamato minore.

ἐπεὶ γὰρ ἑξαγώνου ἐστὶν ἡ ΦΧ, δεκαγώνου δὲ ἡ ΧΩ, ἡ ΦΩ ἄρα ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέμηται κατὰ τὸ Χ, καὶ τὸ μεῖζον αὐτῆς τμῆμά ἐστιν ἡ ΦΧ: ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΩΦ πρὸς τὴν ΦΧ, οὕτως ἡ ΦΧ πρὸς τὴν ΧΩ.	Infatti poiché FX è (lato) di un esagono e XO' di un decagono, FO' è dunque tagliato in media e estrema ragione secondo X e il suo segmento maggiore è FX. Dunque come O' F rispetto a FX così è FX rispetto a XO'.

Premettiamo che quando si parla di media ed estrema ragione si intende la sezione aurea di un segmento, ora è dimostrato su tutti i libri di geometria che il lato del decagono regolare è la sezione aurea del raggio della circonferenza in cui è inscritto che poi sarebbe il lato dell'esagono regolare inscritto nella medesima circonferenza cioè l_{10} è la sezione aurea di l_6 in linguaggio moderno scriveremo

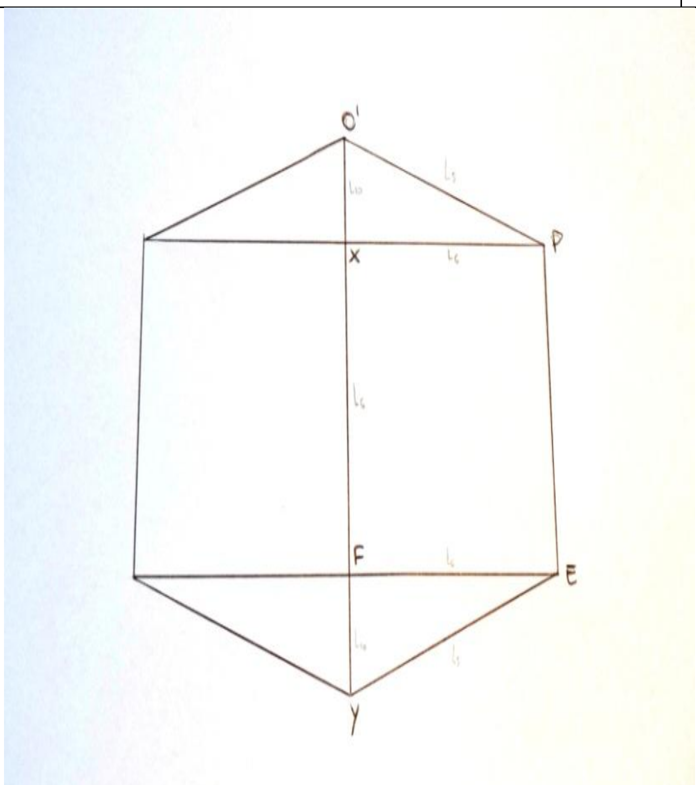
$$l_6 : l_{10} = l_{10} : (l_6 - l_{10})$$

E applicando la proprietà del comporre

$$(l_6 + l_{10}) : l_6 = l_6 : l_{10}$$

Tradotto con i segmenti indicati da Euclide

FO':FX = FX :XO'

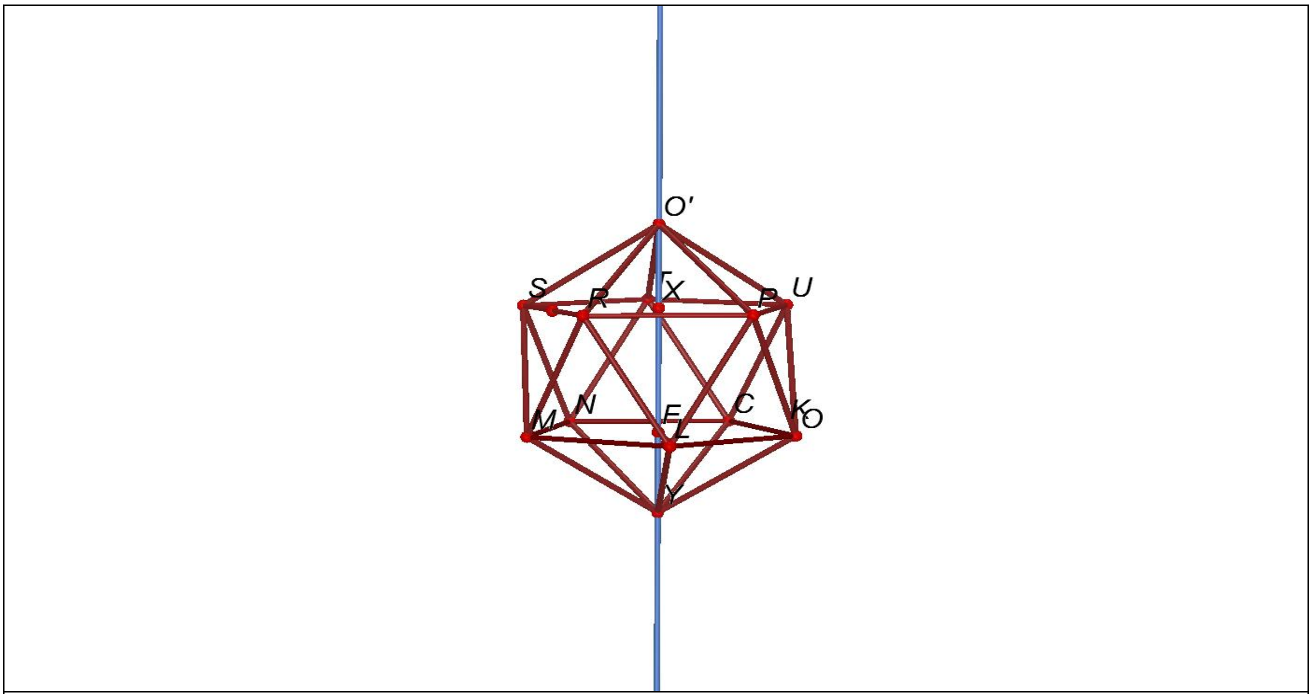
ἴση δὲ ἡ μὲν ΦΧ τῇ ΦΕ, ἡ δὲ ΧΩ τῇ ΦΨ: ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΩΦ πρὸς τὴν ΦΕ, οὕτως ἡ ΕΦ πρὸς τὴν ΦΨ. καί εἰσιν ὀρθαὶ αἱ ὑπὸ ΩΦΕ, ΕΦΨ γωνίαι: ἐὰν ἄρα ἐπιζεύξωμεν τὴν ΕΩ εὐθεῖαν, ὀρθὴ ἔσται ἡ ὑπὸ ΨΕΩ γωνία διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν ΨΕΩ, ΦΕΩ τριγώνων. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΩΦ πρὸς τὴν ΦΧ, οὕτως ἡ ΦΧ πρὸς τὴν ΧΩ, ἴση δὲ ἡ μὲν ΩΦ τῇ ΨΧ, ἡ δὲ ΦΧ τῇ ΧΠ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΨΧ πρὸς τὴν ΧΠ, οὕτως ἡ ΠΧ πρὸς τὴν ΧΩ. καὶ διὰ τοῦτο πάλιν ἐὰν ἐπιζεύξωμεν τὴν ΠΨ, ὀρθὴ ἔσται ἡ πρὸς τῷ Π γωνία: τὸ ἄρα ἐπὶ τῆς ΨΩ γραφόμενον ἡμικύκλιον ἥξει καὶ διὰ τοῦ Π.	E FX è uguale a FE, e XO’ a FY. E dunque come è O’F rispetto a FE, così è EF rispetto a FY. E sono retti gli angoli O’FE e EFY. Qualora dunque congiungiamo la retta EO’, l’angolo sarà retto per l’analogia con i triangoli YEO’ e FEO’. Per le stesse ragioni poiché è come O’ F rispetto a FX, così è FX rispetto a XO’, e O’F è uguale a YX, e FX a XP, ed dunque come YX rispetto a XP, così PX rispetto a XO’. E per questo di nuovo qualora congiungiamo PY, l’angolo su P sarà retto: dunque il semicerchio tracciato su YO’ passerà anche per P.
	*Questa è la proporzione che esprime il secondo teorema di Euclide applicata al triangolo O’EY, cioè* *O’F: FE= FE : FY che, con la considerazione che gli angoli O’FE e EFY sono retti ci assicurano che il triangolo O’EY è retto in E, possiamo quindi vedere che ragiona allo stesso modo sul triangolo O’PY per concludere che è rettangolo in P. Ora tutti i triangoli rettangoli risultano inscritti in un semicerchio di diametro l’ipotenusa. Ne segue che sia P che E appartengono ad un semicerchio di diametro O’Y.*

καὶ ἐὰν μενούσης τῆς ΨΩ περιενεχθὲν τὸ ἡμικύκλιον είς τὸ αὐτὸ πάλιν ἀποκατασταθῇ, ὅθεν ἤρξατο φέρεσθαι, ἥξει καὶ διὰ τοῦ Π καὶ τῶν λοιπῶν σημείων τοῦ εἰκοσαέδρου, καὶ ἔσται σφαίρᾳ περιειλημμένον τὸ εἰκοσάεδρον.	E qualora, stando ferma YO’, il semicerchio ruotato ritorni di nuovo nello stesso punto, da cui aveva cominciato a muoversi, passerà anche per P per i restanti punti dell’icosaedro, e l’icosaedro sarà circondato da una sfera.

Quindi tutti i triangoli che hanno per base O’Y e vertici i vertici restanti dell’icosaedro sono rettangoli, quindi iscritti in semicirconferenze di diametro O’Y, tutte queste semicirconferenze appartengono alla medesima sfera di diametro O’Y, ne segue che l’icosaedro sarà circondato da una sfera.

λέγω δή, ὅτι καὶ τῇ δοθείσῃ. τετμήσθω γὰρ ἡ ΦΧ δίχα κατὰ τὸ Α#. καὶ ἐπεὶ εὐθεῖα γραμμὴ ἡ ΦΩ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Χ, καὶ τὸ ἔλασσον αὐτῆς τμῆμά ἐστιν ἡ ΩΧ, ἡ ἄρα ΩΧ προσλαβοῦσα τὴν ἡμίσειαν τοῦ μείζονος τμήματος τὴν ΧΑ# πενταπλάσιον δύναται τοῦ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τοῦ μείζονος τμήματος: πενταπλάσιον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΩΑ# τοῦ ἀπὸ τῆς Α#Χ. καί ἐστι τῆς μὲν ΩΑ# διπλῆ ἡ ΩΨ, τῆς δὲ Α#Χ διπλῆ ἡ ΦΧ: πενταπλάσιον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΩΨ τοῦ ἀπὸ τῆς ΧΦ. καὶ ἐπεὶ τετραπλῆ ἐστιν ἡ ΑΓ τῆς ΓΒ, πενταπλῆ ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΒ τῆς ΒΓ. ὡς δὲ ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ, οὕτως τὸ	Dico che anche da una sfera data [sarà circondato]. Sia infatti secata FX a metà seconda A’. E poiché una linea retta FO’ è secata in media e estrema ragione secondo X, e il suo segmento minore è O’X, allora O’X aumentando della metà del segmento maggiore XA’ è il quintuplo del quadrato del segmento maggiore dalla metà. Dunque quello su O’A’ è il quintuplo di quello su A’X e O’Y è il doppio di O’A’, invece FX è doppio A’X; quindi quello su O’Y è il quintuplo di quello su XF. E poiché AG è il quadruplo di BG, dunque AB è il quintuplo di BG. E come AB

ἀπὸ τῆς ΑΒ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΔ: πενταπλάσιον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τοῦ ἀπὸ τῆς ΒΔ. ἐδείχθη δὲ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΩΨ πενταπλάσιον τοῦ ἀπὸ τῆς ΦΧ. καί ἐστιν ἴση ἡ ΔΒ τῇ ΦΧ: ἑκατέρα γὰρ αὐτῶν ἴση ἐστὶ τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ΕΖΗΘΚ κύκλου: ἴση ἄρα καὶ ἡ ΑΒ τῇ ΨΩ. καί ἐστιν ἡ ΑΒ ἡ τῆς δοθείσης σφαίρας διάμετρος: καὶ ἡ ΨΩ ἄρα ἴση ἐστὶ τῇ τῆς δοθείσης σφαίρας διαμέτρῳ. τῇ ἄρα δοθείσῃ σφαίρᾳ περιείληπται τὸ εἰκοσάεδρον. λέγω δή, ὅτι ἡ τοῦ εἰκοσαέδρου πλευρὰ ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ἐλάττων. ἐπεὶ γὰρ ῥητή ἐστιν ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος, καί ἐστι δυνάμει πενταπλασίων τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ΕΖΗΘΚ κύκλου, ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ΕΖΗΘΚ κύκλου: ὥστε καὶ ἡ διάμετρος αὐτοῦ ῥητή ἐστιν. ἐὰν δὲ εἰς κύκλον ῥητὴν ἔχοντα τὴν διάμετρον πεντάγωνον ἰσόπλευρον ἐγγραφῇ, ἡ τοῦ πενταγώνου πλευρὰ ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ἐλάττων. ἡ δὲ τοῦ ΕΖΗΘΚ πενταγώνου πλευρὰ ἡ τοῦ εἰκοσαέδρου ἐστίν. ἡ ἄρα τοῦ εἰκοσαέδρου πλευρὰ ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ἐλάττων.	rispetto a BG, così quello su AB rispetto a quello Su BD. Dunque quello su AB è quintuplo di quello Su BD. Fu dimostrato anche che quello su O’Y è quintuplo di quello su FX. E DB è uguale a FX: l’una e l’altra di queste è uguale al raggio del cerchio EZE’WK. Dunque anche AB è uguale a YO’ e AB è il diametro della sfera data. Anche YO’ è quindi uguale al diametro della sfera data. L’icosaedro dunque è circondato da una sfera data. Dico ora che il lato dell’icosaedro è irrazionale (*quello chiamato minore)*. Perché infatti il diametro della sfera è esprimibile (=*si può chiamare irrazionale*) ed è cinque volte il quadrato del raggio del cerchio EZE’WK, dunque è esprimibile (=*si può chiamare irrazionale)* anche il raggio del cerchio EZE’WK, cosicché anche il suo diametro è esprimibile (=*si può chiamare irrazionale*). Qualora invece un pentagono equilatero sia inscritto in un cerchio con diametro esprimibile (=*si può chiamare irrazionale*), il lato del pentagono irrazionale, quello chiamato minore. E il lato del pentagono EZE’WK è quello dell’icosaedro. E dunque il lato dell’icosaedro è irrazionale, quello chiamato minore.



Per dimostrare che il segmento O’Y è proprio quel segmento AB da cui è partito per costruire il primo pentagono Euclide cita un suo precedente teorema (prop XIII,3) che afferma che (in linguaggio moderno) $(l_{10}+\frac{l_6}{2})^2=5(\frac{l_6}{2})^2$

Tradotto sulla nostra figura, dopo aver indicato, esattamente come fa Euclide, il punto medio del segmento XF con A’ (ovviamente A’ coincide con il centro della sfera) risulta

$(O'X+XA')^2=5(XA')^2$ *cioè* $(O'A')^2=5(XA')'^2$

ora moltiplicando ambo i membri dell’uguaglianza per 4 e inserendo il 4 nella parentesi possiamo scrivere:

$(2O'A')^2=5\,(2\,XA')^2$ *cioè* $O'Y^2=5XF^2$

Ora basta osservare che XF era uguale al segmento DB da cui siamo partiti (cioè il raggio del cerchio in cui abbiamo inscritto il primo pentagono) per concludere che AB=XF e che quindi vale la relazione $AB^2=5DB^2$ *che è la relazione da cui siamo partiti per cui l’icosaedro risulta inscritto nella sfera di diametro fissato AB.*