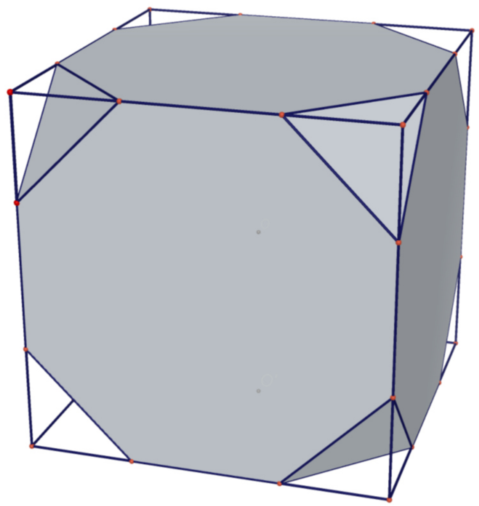
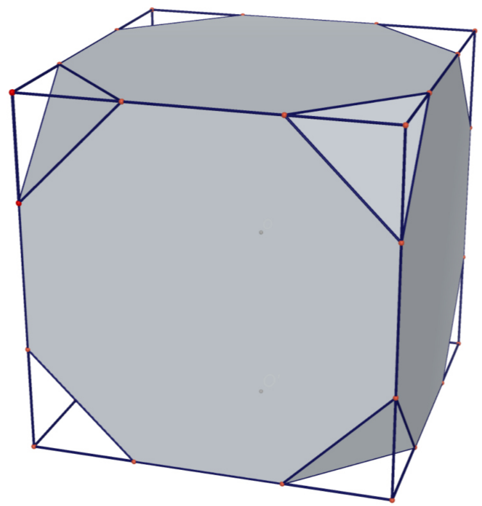


DOMANDA 15

Tronchiamo tutti i vertici di un cubo per mezzo di piani passanti per punti degli spigoli concorrenti in un vertice aventi tutti la stessa distanza *d* dal vertice stesso (vedere figura). Otteniamo un poliedro *P* avente come facce triangoli equilateri e ottagoni. Per una particolare distanza *d* gli ottagoni sono regolari. In questo caso il poliedro *P* è un poliedro archimedeo, chiamato *cubo tronco*.



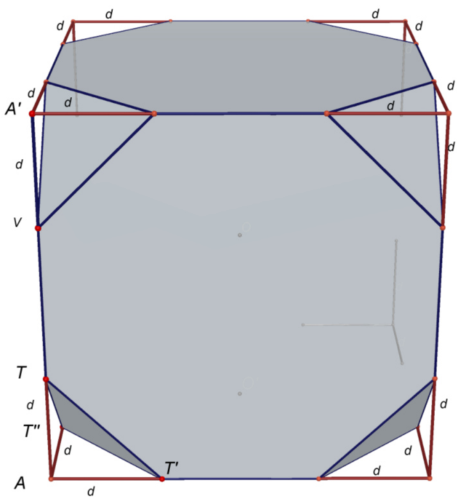
Quale è la superficie del cubo tronco derivato da un cubo avente gli spigoli di lunghezza *s*?

RISPOSTA ALLA DOMANDA 15

$$S = \left(12\sqrt{2} + 6\sqrt{3} - 4\sqrt{6} - 12\right)s^2$$

DIMOSTRAZIONE

Sia *s* la lunghezza dello spigolo del cubo. Per il teorema di Pitagora si ha $d(T,T') = d(T',T'') = d(T'',T) = \sqrt{2}d$. E quindi il triangolo *TT'T''* è equilatero, qualsiasi sia la distanza *d*.



Indichiamo con s' la lunghezza dello spigolo del cubo tronco. Noi vogliamo che si abbia $s' = d(T,V) = s - 2d = \sqrt{2}\,d$.

Da cui segue $\frac{s}{d} = 2 + \sqrt{2}$ o, equivalentemente, $d = \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)s$.

E quindi $s' = s - 2d = s - \left(2 - \sqrt{2}\right)s = \left(\sqrt{2} - 1\right)s$.

Siano:

S = superficie del cubo tronco, *S'*=superficie del cubo,

S''=area del triangolo *ATT'*, *S'''*=area del triangolo *TT'T''*.

Si ha

$S = S' - 24\,S'' + 8\,S'''$. E quindi:

poiché $S' = 6s^2$, $S'' = \frac{1}{2}d^2$, $S''' = \frac{\sqrt{3}}{4}s'^2$, abbiamo

$$S = \left(12\sqrt{2} + 6\sqrt{3} - 4\sqrt{6} - 12\right)s^2$$

Per completezza dimostriamo che gli esagoni sono regolari. Devono essere quindi uguali sia tutti i lati che tutti gli angoli.

Abbiamo visto che gli esagoni hanno tutti i lati uguali. I loro angoli sono tutti uguali perché sono supplementari a 45°, dal momento che il triangolo *TT'T''* è retto ed isoscele e quindi i suoi angoli alla base misurano 45°.